

FRAÇÃO COMO MEDIDA E NÚMERO: discussões a partir da análise de erros***FRACTION AS MEASURE AND NUMBER: discussions from error analysis***Líslei Rutz Wolter¹ - Unipampa João Carlos Pereira de Moraes² - UTFPR **RESUMO**

Este artigo tem como objetivo analisar o processo de debate sobre os sentidos de medida e número do conceito de fração, a partir da perspectiva da análise de erros, com alunos do quarto ano do Ensino Fundamental. A pesquisa foi realizada com vinte e nove alunos de uma turma de uma escola do Rio Grande do Sul/RS. A pesquisa foi desenvolvida através de uma intervenção pautada nas ideias de medida e número de fração. A análise dos dados foi realizada numa perspectiva descritiva-narrativa. Como resultado, a pesquisa evidenciou que a análise de erro permitiu um processo reflexivo de construção do conceito de frações, gerando uma cultura em sala que traz o questionamento como parte da atividade do aluno. Conclui-se, assim, que a pesquisa potencializou a construção do conceito de fração e criação de novas compreensões mais elaboradas sobre ele.

PALAVRAS-CHAVE: Fração; Análise de erros; Anos Iniciais; Alunos.

ABSTRACT:

This article aims to analyze the process of debate about the meanings of measurement and number in the concept of fraction, from the perspective of error analysis, with students in the fourth year of Elementary School. The research was carried out with twenty-nine students from a class at a school in Rio Grande do Sul/RS. The research was developed through an intervention based on the ideas of measurement and number of fractions. Data analysis was carried out from a descriptive-narrative perspective. As a result, the research showed that error analysis allowed a reflective process of building the concept of fractions, generating a culture in the classroom that brings questioning as part of the student's activity. It is concluded, therefore, that the research enhanced the construction of the concept of fraction and the creation of new, more elaborate understandings about it.

KEYWORDS: Fraction; Error analysis; Early Years; Students.

INTRODUÇÃO

¹ Mestra em Educação pela Unipampa. Graduada em Matemática pelo Centro Universitário Leonardo da Vinci. Docente da Secretaria Estadual de Educação do Rio Grande do Sul. EMAIL: lisleiwolter@gmail.com.

² Doutor em Educação pela USP. Mestre em Educação Científica e Tecnológica pela UFSC. Graduada em Matemática pela UENP e em Pedagogia pela UEM. Docente do Departamento de Fundamentos da Educação em UTFPR. EMAIL: joaomoraes@utfpr.edu.br.

Na Base Nacional Comum Curricular - BNCC (Brasil, 2017), as frações surgem na vida escolar dos alunos, com essa nomenclatura, no quarto ano do Ensino Fundamental. Nesse período, a criança compreende noções de fração pelo seu convívio com situações cotidianas, não exigindo as suas significações em totalidade.

Ao observar os estudos de frações nos Anos Iniciais, evidenciam-se diferentes práticas de ensino: estudos em uma perspectiva histórica (Cruz, 2016); oficinas pedagógicas (Barros, 2007); discussões de registros de representação semióticas (Martins, 2012; Santa, 2018); sequências de ensino (Malaspina, 207; Bazani, 2019; Castro, 2014; Mayrink, 2019); abordagens tecnológicas (Sá *et al.*, 2010; Pedrosa *et al.*, 2016), entre outros. Porém, a partir dos estudos citados, Wolter e Moraes (2021) apontam as ausências de estudos que se aprofundam a análise de erros como possibilidade didático-pedagógica para o ensino de fração.

Nesse sentido, consideramos que a proposta da análise do erro consiste em transformar os obstáculos gerados na aprendizagem dos estudantes, em oportunidade para debater o pensamento fracionário, instigando novas estratégias de pensar os problemas matemáticos. Em tal perspectiva, o aluno parte das suas hipóteses, mediadas com os questionamentos do professor, deixando de lado a frustração do que não deu certo, motivado a ir adiante dentro da atividade.

Perante tais pressupostos, esta pesquisa visa analisar o processo de debate sobre os sentidos de medida e número do conceito de fração, a partir da perspectiva da análise de erros, com alunos do quarto ano do Ensino Fundamental. Como estrutura, além desta introdução e das considerações finais, o texto apresenta: (1) referencial teórico, discutindo conceitos de erro e fração; (2) abordagem metodológica, elencando a metodologia da pesquisa; e (3) resultados e discussões, evidenciando as inferências da intervenção empreendida.

REFERENCIAL TEÓRICO

Para a composição do referencial teórico, elaborou-se um debate sobre dois elementos presentes na pesquisa e que permeiam a intervenção e análise dos dados: o erro e a fração.

O conceito de erro

O erro pode ser visto como todo juízo ou resultado que contrarie a um critério reconhecido válido ou correto. Para Platão, o erro era uma combinação que não seguia regras predeterminadas, dessa forma, não poderia ser unido ou combinado (Sofista, 1972). Já Aristóteles (1982) percebe o erro como um acidente na linha de raciocínio, afirmando que este não tem lugar na ciência.

São Agostinho (1999), por sua vez, acreditava que as pessoas vinham a cometer erros na ausência de conhecimento. No mesmo sentido, Leibniz (2013) reconhecia o erro como limitação ou imperfeição da natureza humana. Já Locke (1988, p. 33) dizia que "o erro não é uma falha do nosso conhecimento, mas um engano do nosso juízo, que dá assentimento ao que não é verdadeiro".

No ambiente escolar, para compreender o ato de errar, devem ser observadas as situações e momentos em que eles ocorrem, visando compreender a construção do processo de conhecimento (Wolter; Moraes, 2021). Nesse sentido, segundo Cury (2007), o processo de construção de raciocínio não acontece de forma igual em todos os alunos. Dessa forma, a dicotomia acerto/erro permanece unida em todos os desafios. Quando o professor compreende

essa relação passa a observar as situações escolares de outro modo, percebendo o erro como elemento do processo de aprendizagem (Cury, 2007).

Nessa perspectiva, Hadamard (1945, p. 49) ressalta que,

Muitas vezes, ao tentar ensinar, os professores se debruçam demasiadamente sobre cada parte de um argumento, não apresentando a síntese que representaria o resultado. Se um aluno entende por si só essa síntese, “aprende” a Matemática, mas se ele sente que está faltando algo e não compreende o que está errado, fica totalmente perdido e não consegue superar a dificuldade.

Em pensamento semelhante, Krutetskii (1976) relata que é necessário que o professor atente para o processo que o aluno faz para chegar ao resultado. Já nas palavras de Brousseau (1983, p. 171),

O erro não é somente o efeito da ignorância, da incerteza, do acaso, como se acredita nas teorias empiristas ou behavioristas da aprendizagem, mas o efeito de um conhecimento anterior, que tinha seu interesse, seu sucesso, mas que agora se revela falso, ou simplesmente inadaptado. Os erros desse tipo não são instáveis e imprevisíveis, eles são constituídos em obstáculos.

Nesse contexto, o erro é visto como um aprendizado que, agora, não satisfaz, mas que anteriormente era válido, uma hipótese, porém, se torna falso por não chegar ao objetivo, vindo a ser um obstáculo. Borasi (1996), por sua vez, propõe a construção de ambientes de aprendizagem nos quais o potencial dos erros pode ser aproveitado. Sua ideia é usar determinado erro para questionar se o resultado incorreto pode verificar-se, ao invés de tentar eliminá-lo de imediato da sala de aula.

O conceito de fração

A partir do contexto de necessidade cotidiana da humanidade, Boyer (1996) ressalta que emergem os números racionais. Segundo Niven (1984), “um número racional é um número que pode ser colocado na forma a/d , onde a e d são inteiros e d não é zero” (Niven, 1984, p. 30), ou seja, um número passível de representação numérica fracionária.

No Ensino Fundamental, as frações surgem nos currículos escolares com tal denominação a partir do 4º Ano. Na BNCC (Brasil, 2017), percebe-se no quadro abaixo, a fração sobressai na unidade temática números:

Quadro 1 - Recorte unidade temática números

Unidade Temática: Números		
Ano	Objeto do conhecimento	Habilidade
4º ano	Números racionais: frações unitárias mais usuais ($1/2$, $1/3$, $1/4$, $1/5$, $1/10$ e $1/100$)	(EF04MA09) Reconhecer as frações unitárias mais usuais ($1/2$, $1/3$, $1/4$, $1/5$, $1/10$ e $1/100$) como unidades de medida menores do que uma unidade, utilizando a reta numérica como recurso.
	Números racionais: representação decimal para escrever valores do sistema monetário brasileiro	(EF04MA10) Reconhecer que as regras do sistema de numeração decimal podem ser estendidas para a representação decimal de um número racional e relacionar décimos e centésimos com a representação do sistema monetário brasileiro.

Fonte: produção dos autores perante a BNCC (Brasil, 2017).

Contudo, a fração não pode ser vista como um conceito unitário. As frações, ao longo da história, foram empregadas em diversos contextos, surgindo, assim, alguns significados específicos para sua utilização. Desse modo, dependendo da situação didática a ser resolvida, uma ou outra significação precisa ser suscitada pelo docente.

Cavalcanti e Guimarães (2008, p. 2-3), estruturando uma síntese dessa ideia, elaboram um quadro com os significados e exemplos para melhor compreensão:

Quadro 2 - Significados da fração

Significado	Definição	Exemplo
Parte/todo	Partição de um todo n partes iguais, em que cada parte pode ser representada como $1/n$. Um procedimento de dupla contagem, das partes do todo e das partes tomadas, no geral, é suficiente para solucionar o problema.	Uma jarra com suco foi dividida entre três copos. João bebeu um copo. Que fração representa o que ele bebeu da jarra?
Quociente	A fração indica uma divisão e seu resultado. Nas situações de quociente, temos duas variáveis, sendo uma variável correspondente ao numerador e outra ao denominador.	Em uma festa foram distribuídos 2 bolos para 6 crianças igualmente. Quanto cada uma vai receber?
Probabilidade	A fração representa a chance de um evento ocorrer. (Número de casos favoráveis dividido pelo número de casos possíveis)	Jogando uma vez um dado que fração representa a possibilidade de tirar o número 3 ou 4?
Operador Multiplicativo	A fração é um valor escalar aplicado a uma quantidade, ou seja, um multiplicador da quantidade indicada.	Numa jarra contendo 900 ml de suco Pedro bebeu $1/3$ do líquido. Quantos mililitros ele bebeu?
Número	A fração é um número em si, não sendo necessário que expresse uma relação ou contexto para ser compreendida numa dada situação.	Onde posso marcar na reta numérica $1/3$?
Medida	Comparação na qual a fração está relacionada à pergunta quantas vezes? Nesse caso, uma determinada parte é tomada como referência para se medir uma outra.	Tomando a reta CD como unidade de medida, quanto mede AB? $\frac{AB}{CD} = \frac{B}{D}$ Outro caso: Quantos copos de $1/3$ litro são necessários para encher um balde de 15 litros?
Razão	A fração refere-se a quantidades intensivas, nas quais a quantidade é medida pela relação entre duas variáveis.	Para fazer um suco de laranja eu misturo numa jarra 2 copos de água para 1 de concentrado. Que fração de concentrado eu tenho na jarra?

Fonte: Cavalcanti e Guimarães (2008).

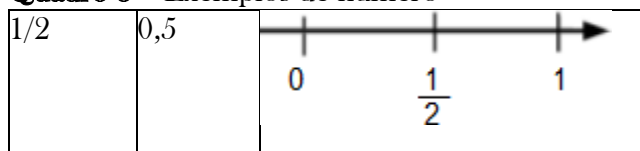
Observando os exemplos do quadro, percebe-se que $1/3$ aparece em todos os casos, porém, em contextos diferentes, mas em todos representando uma fração. Nesse sentido, o pensamento fracionário se faz potente na construção do conhecimento matemático quando envolvido no contexto de resolução de problemas. Isto é, em momentos em que se torna necessário a interpretação de situações e sua inferência matemática, gerando possíveis resoluções.

Para a pesquisa, e visando atender o elencado no 4º Ano da BNCC (Brasil, 2017), duas significações para a fração são mais pertinentes para o estudo:

- ✓ **Número:** O significado número está associado à representação numérica da fração (forma de m/n ou em forma decimal). Nesse sentido, a sua construção necessita estar relacionada com o processo de sequenciação dos números. Essa apropriação faz com que Nunes *et. al* (2003) ressaltem a importância do recurso da reta numérica para o ensino da matemática.

Desse modo, Nunes et. al (2003, p. 128) apontam que “frações, como os inteiros, são números que não precisam, necessariamente, referir-se a quantidades específicas”, o que possibilita uma gama de usos sociais.

Quadro 3 - Exemplos de número



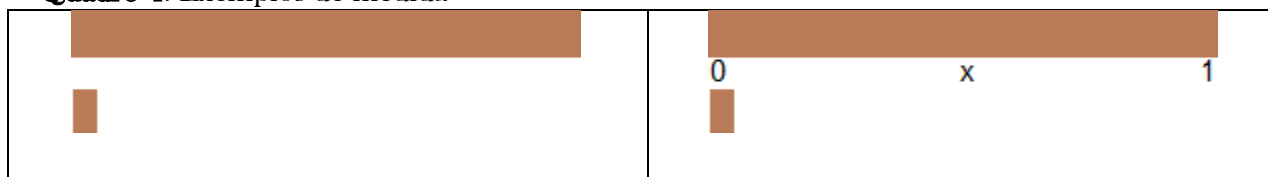
Fonte: elaboração dos autores.

No quadro acima, podemos observar as três formas de representar a fração em número, todos significando um meio. Vale salientar que a fração utiliza algarismos hindu-arábicos para sua composição.

- ✓ **Medida:** O significado de medida se apoia na seguinte situação: existe uma unidade de medida como referência e verifica-se quantas partes cabe na parte que se quer medir.

Para Silva (2005, p. 117), “as tarefas de medição naturalmente associam a concepção de medida, associado a manipulação de um padrão, chamado unidade de medida que, por sua vez, dependerá diretamente da grandeza em jogo”.

Quadro 4: Exemplos de medida



Fonte: elaboração dos autores.

Ao observar o quadro acima, pensando no padrão de medida de manipulação elencado por Silva (2005), podemos sugerir que a barra maior é a grandeza em jogo, a barra menor é o padrão de medida, a fração será obtida a partir da verificação das partes que irão caber na barra. Ainda, em um segundo momento, é possível associar um valor a um determinado ponto (x) dessa grandeza.

ASPECTOS METODOLÓGICOS

A pesquisa se caracteriza como qualitativa, uma vez que os dados coletados são predominantemente descritivos e nossa preocupação está voltada mais para o processo do que para a geração de um produto (Ludke; André, 1986). Além de qualitativa, a pesquisa possui um caráter intervencionista, uma vez que procuramos não apenas explicar, mas, também, interferir na realidade estudada para modificá-la (Damiani *et al.*, 2013).

O espaço de intervenção foi uma turma de vinte alunos do quarto ano do Ensino Fundamental de uma Escola Estadual localizada no interior do Rio Grande do Sul/RS. A turma possuía 15 meninas e 14 meninos, com idade média de 9 anos. Com o intuito de manter a confidencialidade dos sujeitos, serão omitidos os nomes reais dos participantes da pesquisa. Ainda sobre as questões éticas, destacamos que o Projeto de Pesquisa foi encaminhado para o

Comitê de Ética da Universidade Federal do Pampa (CEP). Após a avaliação, o parecer consubstanciado 4.711.213 do CEP informa que o projeto de pesquisa foi aprovado.

Além disso, apontamos que, antes da intervenção, foi solicitada a autorização dos pais para sua realização, via Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE) do responsável e, em seguida, disponibilizado aos alunos o Termo de Assentimento Livre e Esclarecido (TALE) para que também autorizassem que os dados obtidos na intervenção pudessem ser analisados na pesquisa.

Como procedimentos, realizou-se uma sequência de intervenção com as etapas:

1º etapa: para relacionar a fração como medida, partimos de situações cotidianas, como distância de determinados pontos, figuras que possuem a comparação de medidas entre elas.

2º etapa: Para compreender a fração na reta numérica, foi desenvolvido atividades em uma reta numérica fictícia de barbante em sala.

A análise do erro foi realizada a partir das atividades desenvolvidas pelos alunos. Por meio da coleta das compreensões errôneas dos alunos pela docente, no dia seguinte à realização de cada atividade, os erros foram discutidos em grupo.

Para coleta de dados, as atividades desenvolvidas com os alunos foram gravadas em áudio e vídeo, sendo, posteriormente, transcritas para análise. Além disso, foram feitas fotos dos momentos de atividade do grupo, bem como, um diário de campo pela pesquisadora, relatando o ocorrido em sala.

Para o processo de análise dos dados, realizou-se uma abordagem analítica direcionada para uma perspectiva intervencionista de estudo. Como aponta André (2005), a perspectiva a análise de dados de uma pesquisa deve dialogar com a proposta epistemológica, conceitual e social de coleta de dados dela.

Ainda, para André (2013),

Na perspectiva das abordagens qualitativas, não é a atribuição de um nome que estabelece o rigor metodológico da pesquisa, mas a explicitação dos passos seguidos na realização da pesquisa, ou seja, a descrição clara e pormenorizada do caminho percorrido para alcançar os objetivos, com a justificativa de cada opção feita (André, 2013, p. 96).

Assim, a preocupação da análise está atrelada aos pormenores do caminho percorrido para construí-la. Assim, optamos por uma abordagem descritiva-narrativa de análise, inspirada na abordagem realizada por Moraes (2014). Para este autor, em práticas de pesquisas que visem apontar processos de mudança, como forma de indício, é preciso que a pesquisa descreva o processo e elenque possíveis transformações (Moraes, 2014).

RESULTADOS E DISCUSSÕES

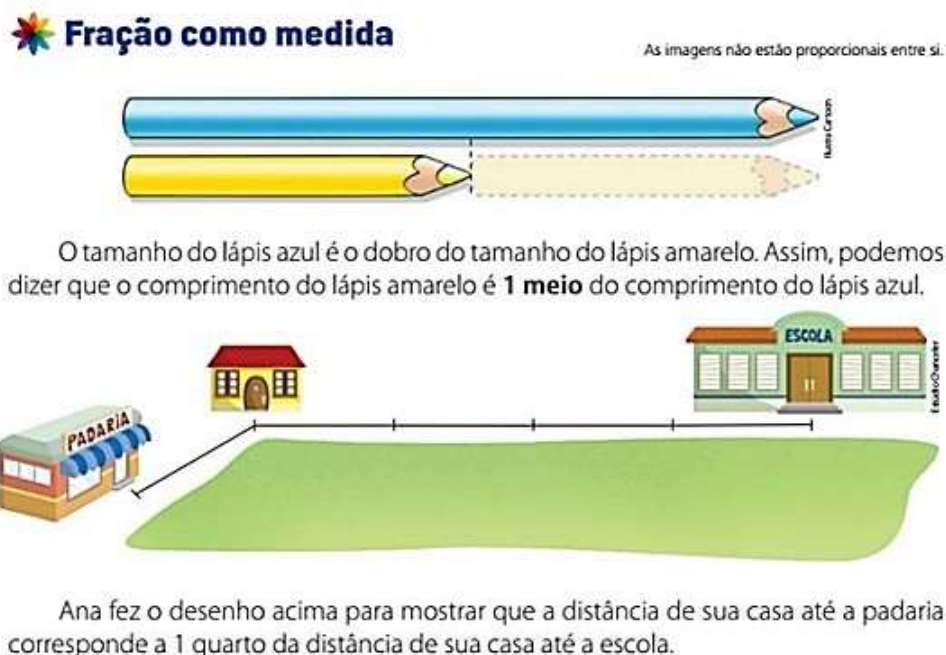
Fração como medida

Com o intuito de relacionar a fração como medida, partimos de situações cotidianas, tais como: distância de determinados pontos e figuras que possuem a comparação de medidas entre elas. Como atividade inicial,

utilizamos situações selecionadas apresentadas no livro didático da turma (DC).

A atividade inicial pode ser vista abaixo:

Figura 01: Fração como medida



Fonte: Livro Bem-me-quer (2023).

Após os alunos analisarem a situação, individualmente, iniciamos um debate em grupo:

P: Bom, se formos observar, onde vemos a fração no dia-a-dia? alguém já viu?

A4: Nas receitas de bolo tem! Aparece nos ingredientes, em outras que minha mãe faz tem também.

P: Receitas... Onde mais?

A10: Na pista do ginásio tem também.

P: E vocês sabem o que elas significam?

A1: Um número, uma marcação?

[...]

P: Isso, vamos pegar o exemplo que vocês falaram do bolo. Quando aparece $\frac{1}{2}$ da xícara de óleo, por exemplo, quer dizer que do tamanho da xícara nós vamos dividir em dois e utilizar só uma parte dela... Se fosse $\frac{1}{4}$ de fermento, dividiríamos a mesma xícara agora em quatro partes e colocaríamos só a primeira medida de fermento no bolo.

[...]

P: Observando o livro nós temos outros exemplos no primeiro o lápis amarelo representa $\frac{1}{2}$ do lápis azul, por ter a metade do seu tamanho. No segundo temos um exemplo da distância comparando a ida para a padaria com a ida pra escola, nesse caso, a distância da padaria representa $\frac{1}{4}$ da distância para a escola, ou seja, para fazer a mesma distância a menina precisa ir quatro vezes a padaria e somente uma para a

³ Para a inserção dos instrumentos na análise, utilizou-se o itálico com recuo de 4 centímetro. Além disso, demarcou-se as seguintes siglas: Diário de Campo (DC); P (pesquisadora); A1 e assim por diante (Aluno); TP (transcrição parcial).

escola. Percebam as marcações no caminho, essas marcações são semelhantes às que o colega de vocês falou sobre a pista no ginásio. (TP)

Realizamos uma atividade no livro e, em seguida, realizamos uma atividade prática. Segue o que foi desenvolvido:

Figura 02: Atividade prática – fração como medida.

Produzir quatro fitas da mesma largura.

- Uma branca, medindo 12cm;
- Uma vermelha, medindo 6cm;
- Uma roxa, medindo 3cm;
- Uma verde, medindo com 2cm.

Estabeleça relações entre elas:

- a) O Comprimento da vermelha é _____ do comprimento da branca.
- b) O comprimento da roxa é _____ do comprimento da branca.
- c) O comprimento da roxa é _____ do comprimento da vermelha.
- d) O Comprimento da verde é _____ do comprimento da branca.
- e) O Comprimento da verde é _____ do comprimento da vermelha.

Fonte: Elaboração dos autores.

Foi entregue uma folha dura para cada aluno, já havia solicitado anteriormente que trouxessem tesoura, cola, régua, lápis de cor, para fazer as fitas (DC).

[...]

P: Primeiro peguem o lápis e a régua, começando por um dos cantos vamos fazer a fita de 12 centímetros, deixem uns 2 centímetros de largura.

Alguns minutos depois...

P: Sem recortar façam uma igual embaixo também com 12 centímetros.

[...]

A15: Eu recortei e agora.

P: Quem recortou não tem problema pode desenhar embaixo da parte que recortou. Com ela pronta, vamos medir 6 centímetros dentro dela.

A4: Vai ficar bem na metade?

P: Isso! Escolham uma das metades e vamos dividir essa ao meio, ficando com 3 centímetros.

A9: A metade da metade! Esse, pinta de roxo né?

P: Sim de roxo, quem não tiver essa cor pode escolher outra que não tem na lista. Escolham uma dessas de 3 centímetros e marquem 2 centímetros, esse pintamos de verde. Após recortarem e pintarem vocês vão unir sempre as duas fitas do exercício e descobrir que fração forma, coloquem as respostas nos espaços. (TP)

Nesse momento da intervenção, elencamos dois elementos que entraram em evidência: a questão social da fração como medida e o uso de conhecimentos anteriores.

Quanto à questão social, percebemos que fração como medida tem forte conotação de leitura da realidade social dos alunos: são as receitas de bolos (A4) e a pista do ginásio (A10). Segundo Morais (2011), essa realidade potencializa o uso didático para o professor, tanto no debate das concepções dos alunos, quanto na elaboração de situações problematizadoras.

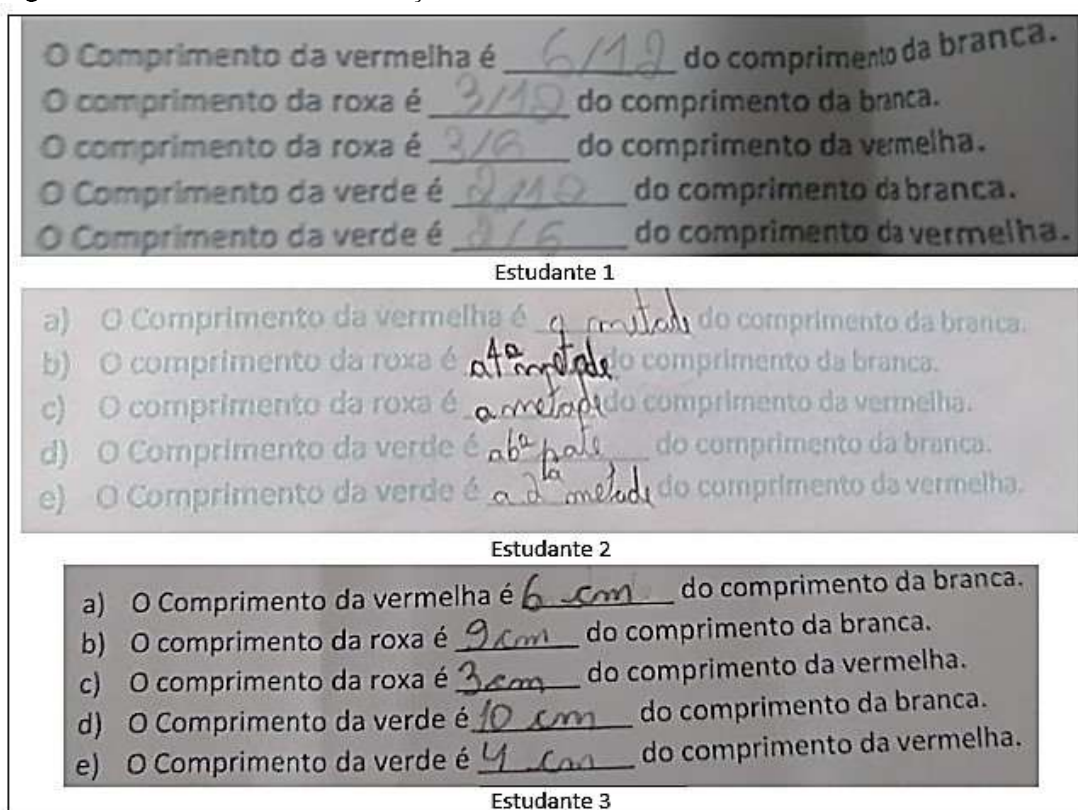
Por outro lado, visualizamos o uso constante do termo metade, já discutido e debatido em outros momentos. Assim, compreendemos que há uma apropriação compreensiva do uso da palavra.

Análise de erro – fração como medida

Começamos o dia corrigindo as atividades do dia anterior, observando as fitas e as respostas (DC).

Segue algumas respostas coletadas para análise:

Figura 03 – Análise de erro – fração como medida



Estudante 1

O Comprimento da vermelha é $\frac{6}{12}$ do comprimento da branca.
 O comprimento da roxa é $\frac{3}{12}$ do comprimento da branca.
 O comprimento da roxa é $\frac{3}{6}$ do comprimento da vermelha.
 O Comprimento da verde é $\frac{2}{12}$ do comprimento da branca.
 O Comprimento da verde é $\frac{2}{6}$ do comprimento da vermelha.

Estudante 2

a) O Comprimento da vermelha é $\frac{1}{2}$ do comprimento da branca.
 b) O comprimento da roxa é $\frac{1}{4}$ do comprimento da branca.
 c) O comprimento da roxa é $\frac{1}{2}$ do comprimento da vermelha.
 d) O Comprimento da verde é $\frac{1}{4}$ do comprimento da branca.
 e) O Comprimento da verde é $\frac{1}{2}$ do comprimento da vermelha.

Estudante 3

a) O Comprimento da vermelha é $\frac{6}{6}$ do comprimento da branca.
 b) O comprimento da roxa é $\frac{9}{6}$ do comprimento da branca.
 c) O comprimento da roxa é $\frac{3}{6}$ do comprimento da vermelha.
 d) O Comprimento da verde é $\frac{10}{6}$ do comprimento da branca.
 e) O Comprimento da verde é $\frac{4}{6}$ do comprimento da vermelha.

Fonte: Elaboração dos autores.

Para a análise dos erros, discutiu-se por item. Isto é, todas as respostas A, em seguida, as respostas B e assim sucessivamente.

Referente ao item A, a discussão aconteceu conforme o debate abaixo:

[...]

P: Selecionei pra vocês observarem algumas respostas que apareceram. Temos três opções pra letra A ($\frac{6}{12}$; a metade; 6 cm), o que vocês acham? (Colocando nessa ordem no quadro as respostas).

[...]

A1: Eu coloquei $\frac{1}{2}$ que seria a segunda resposta a metade.

A3: Acho que a primeira tá errada, tem muito número.

[...]

A4: A última da faltando coisa parece só seis, a fração tem dois números.

A9: A primeira tá certa, 6 é a metade de 12, só não sei a última, pois também tem o 6.

[...]

P: Bom como pedia pra vocês associarem os comprimentos, vocês deveriam comparar um com o outro e relacionar as medidas. Aqui a fita branca mede 12 centímetros e a vermelha mede 6 centímetros, comparando podemos dizer que a vermelha é a metade da fita branca como no exemplo dois, $6/12$ como no primeiro ou ainda $\frac{1}{2}$ como citou o colega de vocês. No último exemplo acredito que tenha faltado informações, pois o colega não colocou se é a medida da vermelha ou o que falta para a branca. (TP)

A partir da análise do erro, começam a emergir algumas associações pertinentes para o conceito de fração como medida, principalmente, aquelas que se interligam ao que chamamos de unidade de medida (Silva, 2005). Nesse sentido, no contexto do problema a ser resolvido, os alunos entendem que tanto a representação $6/12$, $\frac{1}{2}$ e metade são condizentes com a resposta pedida. Esse passo se torna potente para a discussão de frações equivalentes.

Já, sobre a letra B, a discussão foi a seguinte:

[...]

P: Na letra B temos outra associação a fita roxa medindo 3 centímetros e novamente a branca, temos essas respostas pra observar ($3/12$; a 4ª metade, 9 cm), o que vocês acham? (Exemplos da b no quadro).

A4: A primeira tá certa, $3/12$. Eu coloquei $\frac{1}{4}$ olhando pelo desenho.

A7: Eu também coloquei $\frac{1}{4}$ professora.

A8: A segunda também tá certo, mas ficou escrito muito errado, tá estranho.

A13: A última tá errada. A fita roxa não mede 9.

A4: O nove é o que falta doze menos três da 9.

P: Isso muito bem, o colega que fez a última opção não se expressou de forma correta, poderia ter colocado que faltam 9 centímetros até a fita branca ou ter utilizado exemplos parecidos como os citados pelos colegas. (TP)

Além da questão das frações equivalentes sendo construídas ($3/12$ e $\frac{1}{4}$), como relatado no item anterior, evidenciamos um processo de criação. A quarta metade, embora não seja convencional, apresenta uma compreensão que pode ser elaborada a partir da seguinte frase: 'elaborar metade de algo. Dessas metades, elaborar metades. Uma dessas seria a quarta metade'.

Ideias semelhantes são apresentadas na letra C:

[...]

P: Na letra C temos outra situação. Comparamos a fita roxa com a fita vermelha, lembrando que a fita roxa mede 3 centímetros e a vermelha mede 6 centímetros ($3/6$; a metade; 3 cm). (Respostas no quadro)

A4: A primeira tá certa $3/6$ eu como na outra também coloquei $\frac{1}{2}$, professora o desenho é igual ao da letra A só mais pequeno.

A3: A segunda resposta também tá certa.

A9: A última falta coisa, mas o 3, não tá de todo errado, pois é igual que a metade.

P: Isso vocês fizeram boas colocações podemos colocar metade, $\frac{1}{2}$, $3/6$ que satisfaz a questão, na última é necessário colocar mais informações como por exemplo, pra alcançar a fita vermelha falta 3 centímetros. (TP)

Nesse diálogo, notamos um aprofundamento do conceito de frações equivalentes. Quando A4 ressalta que este desenho é igual a letra a, só que menor, visualizamos um entendimento das frações equivalentes em sua representação, em linguagem matemática. Ou

seja, embora os desenhos tenham dimensões diferentes, em sua relação matemática, eles são iguais. Ambos são $1/2$. Percebemos, ainda, que esse olhar do aluno parece superar a métrica dos números naturais da representação figural. Não há conflito para A4 que uma fita tenha 12 cm e outra 6 e, mesmo assim, sejam associadas a frações equivalentes.

Ao que se refere à letra D, os alunos discutiram:

P: Na letra D associamos a fita verde que mede 2 centímetros com a fita branca que mede 12 centímetros. O que vocês acham dessas respostas ($2/12$; a 6ª parte, 10cm)? (Respostas no quadro).

A4: Professora eu coloquei $1/6$ que é o mesmo que $2/12$ usando os centímetros.
[...]

A10: A sexta parte tá errado. Se pintar seis partes do tamanho da fita, pinta tudo.

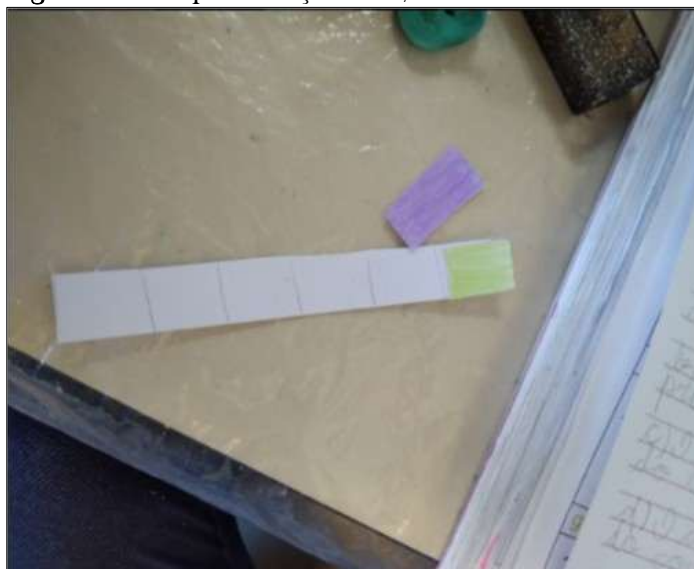
A1: Podia ter colocado que fica dividido a fita branca em 6 com essa medida e usamos uma.

[...]

A7: Na terceira ele colocou só o 10 como nos outros, pra deixar certo, faltam 10 centímetros pra chegar na fita branca.

P: Isso, muito bom as colocações, aqui podemos usar todas elas $1/6$, $2/12$, uma parte das seis marcadas na fita na fita branca. Tem um colega de vocês que marcou na fita, vocês podem fazer assim também. (TP)

Figura 04 – Representação de $1/6$ de aluno



Fonte: A pesquisa.

Ao longo do debate, as compreensões iniciais – sexta parte (A10) – vão sendo insuficientes para o uso do grupo. Ela começa a ser uma representação errada (A10) ou incompleta (A1). Assim, como aponta Cury (2019), a partir da análise de erros, as compreensões começam a ser ressignificadas e os entendimentos do conceito se tornam mais ricos, exigindo uma ação mais elaborada de resolução.

Por fim, há discussão sobre a letra e, abaixo, visualiza-se essa discussão:

P: Na letra E nós associamos a fita verde que mede 2 centímetros com a fita vermelha que mede 6 centímetros. Observem as respostas dos colegas ($\frac{2}{6}$; a 2ª metade; 4 cm), o que vocês acham?

A6: Ali tem $\frac{2}{6}$ tá certo ele usou os centímetros pra fazer os espaços.

A9: Eu coloquei $\frac{1}{3}$ nesse.

A4: A segunda metade tá errado. A figura fica com três partes, então ao tem duas metades.

A1: Na última faltou colocar faltam 4 centímetros pra fita vermelha.

P: Boas colocações somente a segunda metade que temos que fazer algumas mudanças, talvez colocar faltam duas partes pra figura vermelha. (TP).

As discussões sobre a letra são semelhantes às demais. Aqui, queremos ressaltar, de modo transversal, as respostas do questionário do aluno 3, que respondeu todas as questões com números naturais, em forma de centímetro (6 cm, 9 cm, 3 cm, 10 cm e 4 cm). Consideramos que esse elemento seja fruto das dificuldades da transição do conjunto dos números naturais para o pensamento fracionário.

Como já ressaltamos, de acordo com Santos (1997, p.103), “é complicado para um aluno compreender que um número racional é representado por dois símbolos numéricos ($\frac{a}{b}$, onde a e b são isoladamente números) e que esse símbolo representa uma nova quantidade – um novo número”.

Assim, percebemos que este aluno se utiliza da ideia de quanto falta, proveniente do pensamento da subtração, para compor suas respostas. Desse modo, acredita criar uma relação entre o todo e a parte elencada.

Fração como número

O encontro desse dia começa do seguinte modo:

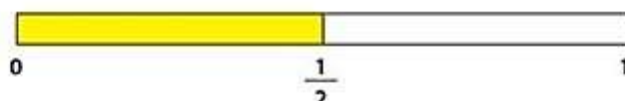
P: Hoje vamos trabalhar a fração na reta numérica. Para compreender a fração na reta numérica, será desenvolvido atividades com situações cotidianas que abordem essa representação de forma contextualizada, para depois ir ao papel, por fim, confeccionar uma reta numérica com frações. Pensando em contextualizar, começamos nosso assunto com o exemplo do livro. (TP)

Figura 05 – Frações na reta numérica

Localização de frações na reta numérica

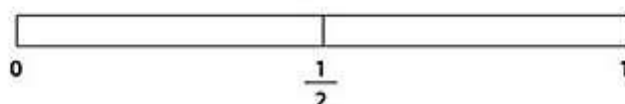
Francisco gosta muito de jogos eletrônicos, mas o seu favorito é um de corrida de automóveis. Nesse jogo, além de controlar a direção e a velocidade do carro, Francisco precisa estar atento à quantidade de combustível indicada no medidor que aparece na tela. Analisando o medidor, Francisco consegue ter uma ideia aproximada de que parte do combustível já foi gasta e quanto resta.

Veja abaixo como o mostrador aparece no início do jogo.



A quantidade total de combustível quando o tanque está cheio corresponde a 1 inteiro. À medida que o jogo avança, há gasto de combustível e o tanque vai esvaziando, até esvaziar por completo, chegando a zero.

Veja abaixo o mostrador indicando que não há mais combustível:



Fonte: Livro Bem-me-quer (2023).

P: Bom, a reta numérica podemos pensar um uma régua com números, mas essa sem fim, a fração é uma parte desses números. Vimos exemplos onde dividimos um objeto, pirulitos, cordas, fitas sempre em partes menores. Agora vamos dividir os números em partes menores. Como exemplo, vamos utilizar a situação de Francisco, jogo o carrinho dele consome combustível. Abaixo, vemos o tanque do combustível ele marca a quantidade que o carro possui. Alguém sabe quanto de gasolina precisa ter pra estar totalmente cheio?

A4: No 1.

P: E vazio a ponto de parar o carro na estrada?

A15: No zero.

P: Tem uma marca que diz $\frac{1}{2}$? O que isso significa alguém sabe? Uma sugestão?

A8: Meio tanque, está bem na metade.

[...]

P: Muito bem. Vamos confeccionar uma reta numérica. Vocês vão escolher uma fração, qualquer uma, escrever na folha, podem usar canetinha, lápis de cor, enfeitar e depois de pronto vamos prender na reta que vou colocar perto do quadro. Como vocês vão usar qualquer fração, pode ocorrer repetições e vamos colocar um abaixo do outro. Para saber onde colocar vocês devem pegar do 0 até o 1 dividir os espaços de acordo com número que vocês colocaram no denominador, depois contar começando do zero os espaços que vocês colocaram no numerador. (TP)

Devido ao tempo, precisamos parar a atividade e finalizá-la no dia posterior. Ao começarmos o dia seguinte, estendemos o barbante em frente ao quadro da seguinte forma:

[...]

P: Olhem, na esquerda está o...

Alunos: zero.

P: Na ponta direita o número...

Alunos: um. [...]

P: agora, cada um de vocês vai inventar uma fração e depois vamos ver o local que ela entra. (TP)

Nesse momento, os alunos criaram as suas frações em silêncio. Em seguida, voltamos para a atividade.

[...]

P: Vamos, então, inserir nossas frações que inventamos na reta numérica. [...]

A14: Eu fiz $\frac{2}{8}$, vou colocar aqui. A1: Acho que tá errado, professora? A3: Eu também acho.

A5: Eu também... (TP)

Nesse instante, percebemos que não teríamos espaço para discutirmos os erros após a atividade. Diferente das demais ações, a fala das crianças já demonstrava a necessidade de que o erro fosse discutido junto com o fazer. De certo modo, acreditamos que essa compreensão seja fruto da didática que foi sendo produzida ao longo de toda a intervenção.

Pautados em Cury (2019), consideramos que os alunos, ao terem possibilidade sistemática de discutirem os seus erros, constroem um processo de vigilância de sua produção de conhecimento. Assim, na atividade da reta numérica, as produções foram todas postas em questionamento.

[...]

P: Pensa um pouquinho, você pegou esse pedaço e dividiu em oito partes e andou só duas até agora. Onde você parou?

A14: Aqui, aqui, aqui... Acho que bem pouco, mais ou menos aqui.

P: Isso, perfeito. (TP)

Vale ressaltar aqui que, por uma opção nossa, não priorizamos a exatidão na reta numérica. Nosso desejo consistia na ordenação das frações e na reflexão sobre possíveis posições delas na reta numérica. Como aponta Moraes (2018), na inserção de novos conceitos, ao professor cabe fazer escolhas, priorizando sua intenção pedagógica. Desse modo, certas dimensões da fração na reta numérica, tal como posição exata das frações, foram deixadas para serem discutidas em outros momentos, ressaltando, assim, a aparente localização na reta.

Os alunos continuaram a discussão:

[...]

A18: Professora o meu também é $\frac{1}{2}$, vou colar embaixo. [...]

A7: Eu fiz $\frac{5}{10}$, no meu caderno ele ficou bem no meio, então colo junto com $\frac{1}{2}$.

P: Todos concordam que fica junto? Pensem na divisão da reta, concordam?

T: Sim

[...]

A16: Eu fiz $\frac{2}{2}$ vou colar junto com o $\frac{7}{7}$.

P: Por qual motivo? Explica pros teus colegas.

A16: O $\frac{7}{7}$ usa todos os espaços, da 1 e $\frac{2}{2}$ também. [Todos colocam as suas frações]

[...]

P: Quero, agora, que todos observem pra ver se está tudo certo. Então...

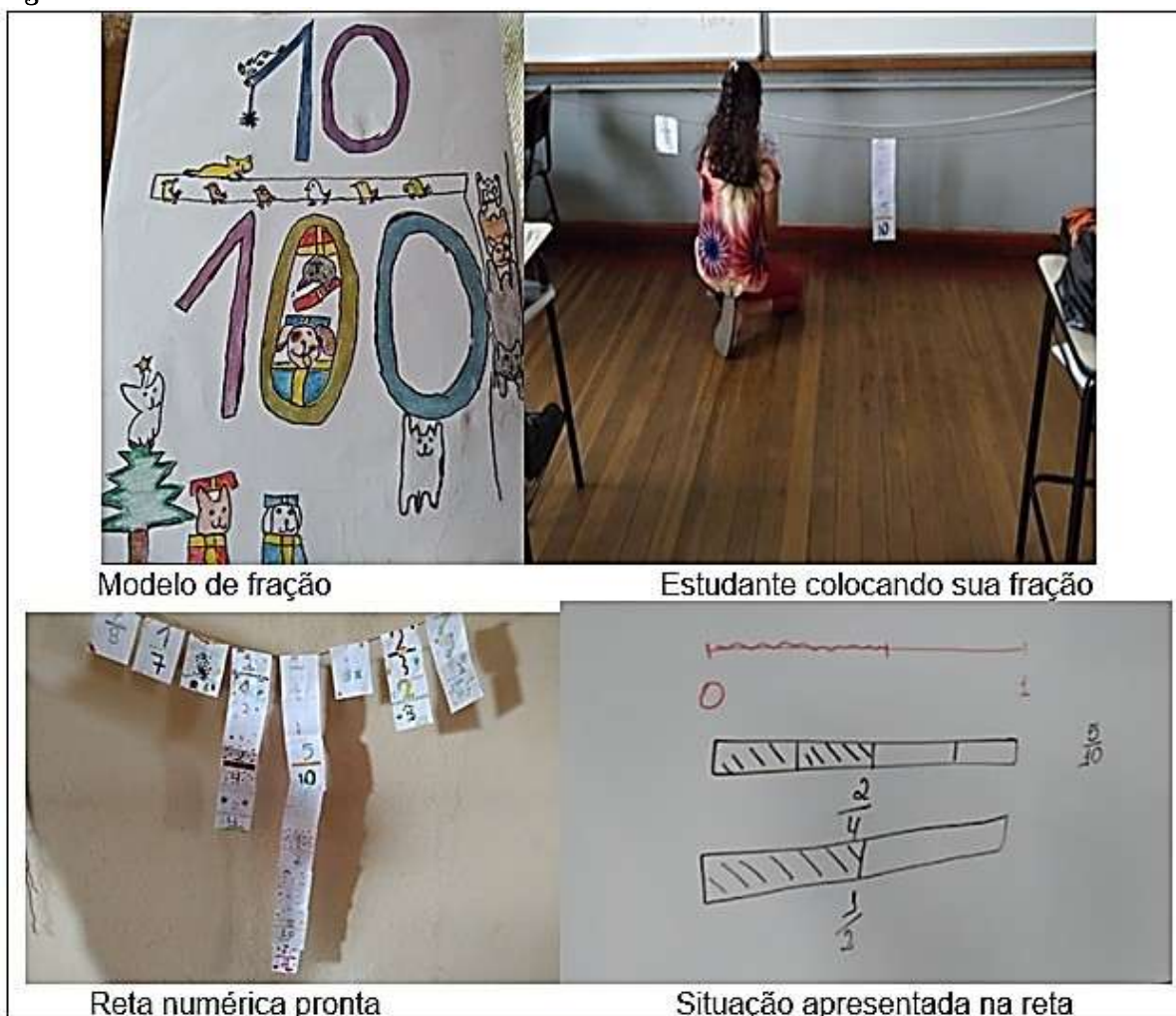
A15: Professora eu coloquei o meu $\frac{2}{4}$ embaixo daquele que já tinha, mas acho que ele deve ir junto com $\frac{1}{2}$. Não sei se tá certo?

A9: Tá certo no lugar que tá, ele fica mais pra esquerda.

P: Observem vou desenhar aqui no quadro, vou marcar os 4 espaços e usar 2. Agora olhem o de baixo mesmo tamanho, mas agora pegamos a reta marcamos dois espaços e usamos 1. Perceberam alguma semelhança entre eles?

A4: São iguais, ficam no mesmo lugar, então eles devem ir junto com o $\frac{1}{2}$ (TP)

Figura 06 – Atividade na reta numérica



Fonte: Elaboração dos autores.

Ao longo da atividade, percebemos que, no próprio processo de discussão, o conceito de frações equivalentes foi ampliado. Além de serem consideradas frações que representam a mesma participação, passam a ser percebidas como números que ocupam o mesmo lugar na reta numérica.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo do presente estudo visou em analisar o processo de debate sobre os sentidos de medida e número do conceito de fração, a partir da perspectiva da análise de erros, com alunos do quarto ano do Ensino Fundamental.

Nesse sentido, percebeu-se que frações como medida trouxe diversas formas de representação e muitos diálogos com as atividades das fitas. Ao perceber que a fração pode ser compreendida e escrita de diversas formas acalorou os debates e busca pelo qual está certo. Fração como número abordou, também, a questão de equivalência, proporcionou reflexões no momento da atividade e após sua conclusão.

Além disso, nota-se as seguintes inferências:

- ✓ O erro e a produção do conceito: não houve a extinção de erros quanto ao conceito de fração. Visualizou-se novos erros, oriundos de um patamar mais reflexivo do conceito. Assim, não há um 'fechar' do conceito, mas novas oportunidades para novas intervenções com os mesmos alunos;
- ✓ A socialização como fonte de reflexão: retirado o papel do docente como aquele que traz as respostas corretas, o debate em grupo assume um papel de problematizador do conceito e fonte para constituir novas ideias sobre fração;
- ✓ Cultura da aula de matemática: ao término do processo, visualizamos um grupo de alunos que incorporam a iniciativa de reflexão sobre os erros em suas produções, tanto que, nas últimas aulas, ação de análise de respostas ocorria de maneira quase que concomitante com a realização delas.

Por fim, percebemos que realizar as atividades nessa perspectiva torna o aluno participante ativo da aprendizagem, pois passa do que está errado e essa é a resposta certa, para um momento de construção. O que está errado? Por que está errado? O que podemos fazer para deixar essa resposta certa? Instigamos o aluno a analisar sua resposta e, a partir dela, construir a resposta certa. Dessa forma, tem mais significado do que uma simples correção, não sendo esquecida facilmente, como foi possível perceber no decorrer das atividades. Espera-se que o artigo se apresente ao leitor como uma contribuição para a reflexão sobre a prática pedagógica, principalmente, no que diz respeito a erros e dificuldades dos alunos.

REFERÊNCIAS

- AGOSTINHO, Santo. **A cidade de Deus: contra os pagãos**. Parte 2 (livros 11-22). Petrópolis, RJ: Vozes, 1999. (Pensamento Humano, 7).
- ANDRÉ, M. O que é um estudo de caso qualitativo em Educação? **Educação e Contemporaneidade**, Salvador, v. 22, n. 40, p. 95-103, jul./dez. 2013. Disponível em: <https://www.researchgate.net/profile/Marli-Andre/publication/311361132>.
- _____. Pesquisa em Educação: questões de teoria e método. In: **Encontro Nacional de Pesquisa em Educação e Ciências**, 5., 2005, Bauru. Anais. Bauru, 2005.
- ARISTÓTELES. **Metafísica**. Traduzido por Valentin García Yebra. 2. ed. Madrid: Gredos, 1982.
- BARROS, M. **Reaprender frações por meio de oficinas pedagógicas: desafio para a formação inicial**. Dissertação (Mestrado em Educação) - UFC, Ceará, 2007.
- BAZANI, B. **Conhecimento dos alunos do quarto ano do ensino fundamental no tópico de fração: um foco na parte-todo contínuo e discreto**. Dissertação (mestrado) - UNICAMP, São Paulo. 2019
- BORASI, R. **Reconceiving mathematics Instruction: a Focus on Errors**. Norwood, Nj: Ablex Publishing Corporation, 1996.
- BORDEAUX, A. L *et al*. **Novo bem-me-quer matemática, 4º ano**. São Paulo: Editora do Brasil, 2007 – Coleção bem-me-quer.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. Trad. Elza Gomide. 2ª ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

BROUSSEAU, G. Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. **Recherches em didactique des Mathématiques**, v4, n.2, p. 165- 168, 1983

CAMPOS, T. *et al.* Sobre a pesquisa e o ensino de números racionais na sua representação fracionária. In: **Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM) – X**, 2010, Bahia.

CASTRO, F. **Quantidades intensivas: análise de uma intervenção com alunos do 5º ano do ensino fundamental**. Dissertação (Mestrado em Educação) – UFSC – Santa Catarina. 2014.

CAVALCANTI, E. M.; GUIMARÃES, G.L. O significado de frações em livros didáticos das Séries Iniciais. In: **Anais do 2º SIPEMAT – Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**. Recife – PE, de 28 de julho a 01 de agosto de 2008. (Publicado em CD-ROM).

CURY, H. N. **Análise de erros: o que podemos aprender com as respostas dos alunos**. Belo Horizonte: Autêntica, 3ª ed. 2019.

CRUZ, L. **Abordando frações em perspectiva histórica: uma possibilidade de ensino para a Educação Básica**. Dissertação (Dissertação em ensino) – UFABC. São Paulo. 2016.

DAMIANI, M. F. *et al.* Discutindo pesquisas do tipo intervenção pedagógica. In: **Revista Cadernos de Educação**, nº 45, 2013, p. 57-67.

HADAMARD, J. **Na essay on the psychology of invention in the mathematical field**. Princeton: Princeton University Press, 1945.

KRUTETSKII, V. A. **The psychology of mathematical abilities in schoolchildren**. Chicago: The University of Chicago Press: 1976.

LEIBNIZ, G.W. **Ensaio de Teodiceia**, tradução de William de Siqueira Piauí e Juliana Cecci Silva, Estação Liberdade, São Paulo, 2013.

LOCKE, John. **Ensaio acerca do entendimento humano**. São Paulo: Nova Cultural, 1988.

LUDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em educação: abordagens qualitativas**. São Paulo, Editora Pedagógica e Universitária, 1986. 99p.

MALASPINA, M. **O início do ensino de fração: uma intervenção com alunos de 2ª série do ensino fundamental**. Dissertação (Mestrado em Educação) - PUCSP, São Paulo, 2007

- MARTINS, F. O número como signo: relatos de uma experiência de ensino de frações a partir das teorias sócio interacionista e dos registros de representações semióticas. Dissertação (Pós-Graduação em Ciências da Linguagem), UNISUL. Santa Catarina. 2012.
- MAYRINK, C. Sequência didática com história infantil e jogo para o ensino de frações. Dissertação (Pós-Graduação Educação e docência) – UFMG – Minas Gerais. 2019.
- MORAES, J. C. P. **Experiências de um corpo em Kandinsky: formas e deformações num passeio com crianças.** Dissertação (Mestrado em Educação Científica e Tecnológica). Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2014.
- MORAES, J. C. P. **Insubordinação, Invenção e Educação: a produção de reflexões por meio do espaço na formação inicial docente em pedagogia.** Tese (Doutorado em Educação). Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, 2018
- MORAIS, C. **A matemática na vida quotidiana.** In P. Palhares, A. Gomes, & E. Amaral (Orgs), **Complementos de Matemática para professores do Ensino Básico** (pp. 281-300). Lisboa: Lidel, 2011.
- NASCIMENTO, E. Frac-soma sensorial: um recurso pedagógico nos estudos de frações para pessoas com deficiência visual. In: **Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM) – XIII**, 2019, Cuiabá.
- NIVEN, I. **Números: Racionais e Irracionais.** Traduzido por Renate Watanabe. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1984.
- NUNES, T.; BRYANT, P.; Pretzlik, U.; Hurry, J. The effect of situations on children's understanding of fractions. In: **British Society for Research on the Learning of Mathematics.** Oxford, june, 2003.
- PEDROSA, V. *et al.* Sequência Fedathi e análise de erros contribuindo para o ensino de frações atrelado ao jogo Fraction Matcher. In: **Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM) – XII**, 2016, São Paulo.
- PLATÃO. **Sofista.** Trad. Jorge Paleikat e João Cruz Costa. Victor Civita. São Paulo, 1972.
- SÁ, P. *et al.* Adição e subtração de frações com calculadora virtual. In: **Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM) – X**, 2010, Bahia.
- SANTOS, V. M. P. **Avaliação de aprendizagem e raciocínio em Matemática: métodos alternativos – Projeto Fundão.** Rio de Janeiro: UFRJ, 1997.
- SILVA, M. J. F. **Investigando saberes de professores do ensino fundamental com enfoque em números fracionários para a quinta série.** 301 f. Tese de doutorado. PUC/SP, São Paulo, Brasil, 2005.

WOLTER, L.; MORAES, J. C. P. Três abordagens do erro em educação e possíveis implicações em educação matemática. In: **Encontro Gaúcho de Educação Matemática**, Pelotas, Brasil, 2021.

| Submetido em: 00/00/2024

| Aprovado em: 00/00/2024

| Publicado em: 00/00/2024