ISSN 2447-0783
Revista Eletrônica Científica Ensino Interdisciplinar
Mossoró, v. 6, n. 16, março/2020

O PENSAMENTO GEOMÉTRICO EM FOCO: construindo uma definição[1]

THE GEOMETRIC THINKING IN FOCUS: constructing a definition

André Pereira da Costa[2] - UFOB

RESUMO
Este artigo é um texto de âmago teórico e objetiva construir uma definição de pensamento geométrico. Efetivamente, não há uma concordância entre os pesquisadores de Geometria sobre esse tipo de pensamento matemático. Por isso, decidimos construir uma caracterização dessa forma de pensar em Geometria considerando os pressupostos teóricos de Maria Alice Gravina (2001) e José Carlos Pinto Leivas (2009), dois pesquisadores brasileiros desenvolvedores de estudos importantes acerca dessa temática. Com base na discussão realizada, concluímos que o pensamento geométrico é a capacidade mental de produzir conhecimentos em Geometria; de mobilizar, de forma coerente, os instrumentos geométricos na resolução de problemas; é a capacidade de entender a complexidade dos fenômenos e realizar inferência sobre eles; de reconhecer e verificar a relevância da Geometria como um instrumento para compreensão do mundo físico e como um modelo em Matemática para entendimento do mundo teórico.
PALAVRAS-CHAVE: Pensamento geométrico; Capacidade mental; Mundo teórico.

ABSTRACT
This articleis a theoretical textand its objective is to construct a definition of geometric thinking. In truth, there is not any agreement among Geometry researcher son thisty peof mathematical thinking. That being the case, we decided to build a characterization of this wayof thinking in Geometry takingin to account the theoretical assumptions of Maria Alice Gravina (2001) and José Carlos Pinto Leivas (2009), two Brazilian researchers who are developing important studieson this subject. Base Don the discussion, we came into a conclusion that geometric thinkingis the mental capacity to produce know ledge in Geometry; to mobilize, in a coherentway, the geometric tools in the process of solving the problems; it is the ability to underst and the complexity of phenomena and to make inferences about them; tore cognize and verify the relevance of Geometry as aninstrument for understanding the physical world and as a model in Mathematics for understanding the theoretical world.
KEYWORDS: Geometricthinking; Mental capacity; Theoretical world.

DOI: 10.21920/recei720206167794
http://dx.doi.org/10.21920/recei720206167794

[1] Trata-se de um recorte da tese de doutorado do autor, que recebeu orientação do Prof. Dr. Marcelo Câmara dos Santos.

[2]Doutor em Educação Matemática e Tecnológica pela Universidade Federal de Pernambuco (UFPE). Professor da Universidade Federal do Oeste da Bahia (UFOB). E-mail: andre.costa@ufob.edu.br / ORCID: https://orcid.org/0000-0003-0303-8656

INTRODUÇÃO

Ao realizarmos um levantamento sobre as pesquisas desenvolvidas no campo da educação geométrica, evidenciamos que diferentes autores (LABORDE, 1985; BISHOP, 1989; NASSER, 1990; DELGRANDE, 1990; GUTIÉRREZ, 1991; PASTOR, 1993; MICHOUX, 2008; CÂMARA DOS SANTOS, 2009 e BLANCO, 2014) falam sobre pensamento geométrico. Apesar de existir uma anuência sobre a importância de promover o desenvolvimento desse tipo de pensamento matemático nos estudantes da educação básica, essas investigações não possuem uma definição consistente para esse termo, persistindo uma ausência de concordância sobre o sentido atribuído a essa forma de pensar em Geometria.

Provavelmente, a ausência de consenso acerca da caracterização do pensamento geométrico esteja estreitamente associada à própria natureza evolutiva da Geometria, à grande quantidade de objetos geométricos relativos ao seu campo conceitual, ao uso de diferentes experimentos matemáticos e, ainda, aos diferentes modos prováveis de considerar esse pensamento em geral (ALMEIDA, 2016).

Diante deste contexto, é que decidimos organizar esse artigo, cujo objetivo é elaborar uma definição de pensamento geométrico, empregando como parâmetro pesquisas de alguns educadores matemáticos que mergulharam (e ainda mergulham) nesse assunto. Também acreditamos que este texto contribuirá com a prática pedagógica dos professores que ensinam Matemática na Educação Básica, e com as pesquisas em Educação Matemática, que investigam o pensamento geométrico.

Fischbein (1993) tratou com muito cuidado sobre o processo de formação do pensamento geométrico ao introduzir a noção de conceito figural. Na Geometria os conceitos dependem da fusão do aspecto figural e aspecto conceitual, isto é, o principal argumento do autor é que a Geometria pode ser compreendida a partir de entidades mentais (as chamadas figuras geométricas) possuidoras, ao mesmo tempo, de características conceituais e figurativas. Então, o pensamento geométrico é caracterizado pela interação entre esses dois aspectos.

Outro nome importante é Duval (1995), ao fornecer uma importante análise do pensamento geométrico, ele apresenta a ideia de registros de representação semiótica, característicos da Geometria. Segundo o pesquisador, o aspecto crucial à compreensão geométrica é a diferenciação do objeto geométrico de sua representação. Os objetos geométricos são idealizações, construções mentais, enquanto que as figuras geométricas são representações desses objetos. Todavia, são essas representações que possibilitam o acesso aos objetos da Geometria.

Assim como Fischbein (1993), Pais (1996) também investigou sobre como ocorre a formação do pensamento geométrico. O autor brasileiro analisou as implicações do uso de desenhos, objetos materiais e de imagens mentais como recursos didáticos auxiliares e representativos do processo de produção dos conceitos geométricos, além do reconhecimento da presença de uma provável conexão desses componentes com as dimensões intuitiva, experimental e teórica do conhecimento geométrico.

Na construção da definição de pensamento geométrico que é adotada nesse artigo, fundamentamo-nos, sobretudo, nos estudos de Maria Alice Gravina (2001) e José Carlos Pinto Leivas (2009), por apresentarem certa congruência na caracterização do pensar em Geometria.

PENSAMENTO GEOMÉTRICO NA COMPREENSÃO DE MARIA ALICE GRAVINA

Maria Alice Gravina (2001), em sua tese de doutorado: “Os ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotético-dedutivo", aponta que a natureza evolutiva do pensamento geométrico se inicia com o pensamento empírico, e finaliza nos pensamentos hipotético-dedutivos.

Nessa direção, no primeiro tipo de pensamento geométrico, o significado atribuído à Geometria apresenta um caráter empírico, ou seja, o estudante, ao analisar os objetos geométricos, mobiliza características extraídas dos objetos que constituem o mundo ao seu redor (Geometria Empírica).

No segundo tipo de pensamento geométrico, a Geometria ganha um status dedutivo, então, o discente reconhece os objetos geométricos por meio de processos dedutivos, isto é, mobilizando propriedades desses objetos que passam agora a compor o mundo abstrato (Geometria Dedutiva).

Segundo a autora, o pensamento geométrico empírico forma-se a partir das sensações e experimentações disponibilizadas pelo meio sensível adjacente. É através da frequência das formas nesse meio que são produzidos os primeiros processos abstratos da Geometria, marcados profundamente por sensações do campo visual, em que paralelogramos, retângulos, quadrados, losangos e trapézios são denominações utilizadas apenas para reconhecer formas.

As situações vivenciadas na escola, referentes à determinação de medidas e manuseios empíricos, carregam o primeiro reconhecimento dos atributos geométricos. Dessa forma, no estudo dos quadriláteros, os estudantes determinam as medidas da abertura dos ângulos internos e, ao realizarem a soma dos valores obtidos, podem estabelecer a seguinte generalização: "A soma das medidas da abertura dos ângulos internos de um quadrilátero vale 360 graus".

Este tipo de situação de aprendizagem não busca promover o desenvolvimento do pensamento geométrico de âmago hipotético-dedutivo, mas pretende promover uma ruptura com o pensamento geométrico de natureza empírica, preparando o estudante para chegar ao pensamento geométrico hipotético-dedutivo.

Para Kopke (2006), no pensamento geométrico empírico, as noções geométricas podem ser exploradas de forma progressiva, por meio das vivências intuitivas dos discentes. Em diversas situações de aprendizagem em sala de aula, é fundamental que os alunos tenham contato com problemas relacionados ao espaço e busquem desenvolver soluções com base em suas concepções alternativas.

A título de ilustração, podemos descrever a posição do estudante na sala de aula, produzir desenhos da sala ou do percurso da escola até a residência do discente. Lembrando que isso é válido quando tivermos a intenção de desenvolver o pensamento geométrico de estudantes da educação infantil, pois, nesse nível de ensino, o foco são as noções geométricas, e não os conteúdos da Geometria em si.

Gravina (2001) argumenta que o desenvolvimento do pensamento geométrico em nível hipotético-dedutivo demanda raciocínios sobre objetos abstratos (raciocínios lógico-dedutivos) que nem sempre se estabelecem de forma espontânea. Tais raciocínios definem conexões de cunho necessários e/ou suficientes entre fatos geométricos.

Ao alcançar esse nível de pensamento geométrico mais elaborado, por meio do estudo da Geometria hipotético-dedutiva, os objetos geométricos são justificados por meio de demonstrações, logo, considerações intuitivas não são mais válidas. Refere-se, portanto, à produção de conhecimento geométrico considerando a Geometria como um campo da Matemática simultâneo ao desenvolvimento do pensamento geométrico.

Em Gravina (2008), a investigadora anuncia que o pensamento geométrico hipotético-dedutivo é marcado por dois níveis de desenvolvimento de aprendizagem em Geometria:

> Podemos considerar pelo menos dois níveis de desenvolvimento dos alunos no processo de aprendizagem de geometria. O primeiro enfoca a compreensão da geometria como um modelo teórico baseado em axiomas, definições, teoremas e provas. O segundo enfoca o desenvolvimento de habilidades que dão suporte à própria produção de provas dos estudantes, assumindo que já é muito claro para eles o significado de provar um teorema – um raciocínio dedutivo baseado em axiomas, definições e teoremas já provados. Alguns quadros teóricos foram desenvolvidos como uma contribuição para a compreensão das habilidades cognitivas necessárias neste processo de aprendizagem em ambos os níveis (GRAVINA, 2008, p. 565, tradução nossa).

Nesse contexto, a pesquisadora entende o pensamento geométrico como os raciocínios de origem dedutiva e visual manifestados nas situações em que ocorre a manipulação de desenhos introduzidos em um campo conceitual bem estabelecido.

É o pensamento que possibilita a produção de conhecimento, que concebe a Geometria como modelo teórico do meio sensível adjacente. Tal modelo é produzido de modo magnífico, pois reflete com considerável exatidão os fenômenos da realidade por meio da dedução de teoremas e demonstrações, mediante inferência lógica, tendo como base um reduzido número de pressupostos (axiomas), dos quais o processo intuitivo não dá conta.

A elaboração de conjecturas e de contraexemplos, a alteração e o aperfeiçoamento de conjecturas são necessários à produção desse modelo teórico, considerando a todo o momento que o foco é a aprendizagem, por meio do processo argumentativo hipotético-dedutivo, a autenticidade do que até o momento era apenas provável. Dessa maneira, provoca-se um sistema espiralado de construção de teoremas, marcado pela elaboração de novos teoremas, tendo por base teoremas demonstrados anteriormente.

Gravina (2001) também cita as habilidades intelectuais fundamentais à produção do conhecimento geométrico e, consequentemente, necessárias ao desenvolvimento do pensamento geométrico: abstrair, generalizar, estabelecer relações, errar, elaborar e refinar conjeturas, testar hipóteses, produzir demonstrações.

Tais habilidades, também denominadas pela autora de experimentos de pensamento, são ações que definem características do processo de construção em Matemática. Nesse sentido, para a educadora matemática, o pensar geometricamente é constituído por todos esses elementos, sendo que eles não se desenvolvem de forma hierárquica, isto é, um educando pode apresentar mais de uma dessas características em seu pensamento geométrico.

Todavia, por meio do olhar graviniano, supomos que a primeira habilidade intelectual do pensamento geométrico sinalizada por uma pessoa é a capacidade de abstrair, prolongando-se com as outras, pois a abstração é mobilizada nos primeiros anos de vida de uma criança, antes mesmo do início da escolarização.

Kopke (2006) menciona ainda outros experimentos matemáticos que caracterizam o pensamento geométrico, mobilizados em situações de observação do espaço: reconhecer formas, representá-las, identificar suas propriedades e abstraí-las. Conforme pode ser verificado a seguir:

> A observação do espaço é incentivada para que os alunos possam reconhecer formas, representá-las, identificar suas propriedades e abstraí-las. Essas habilidades são tidas como a base para a construção das relações espaciais que caracterizam o pensamento geométrico. Exemplos de atividades são dados como aplicações do conhecimento geométrico: construção civil, modelagem,

> costura, artes plásticas e esporte (KOPKE, 2006, p. 132).

Essa investigadora defende que, para promover o desenvolvimento do pensamento geométrico dos estudantes, é importante o professor de Matemática trabalhar os conceitos geométricos em conexão com as diferentes disciplinas escolares: desenho geométrico, artes plásticas, geografia, entre outras, possibilitando sua perspectiva interdisciplinar. Logo, para a autora, a interdisciplinaridade também desenvolve o pensar geometricamente.

Gravina (2001) alega que na passagem do pensamento geométrico empírico para o pensamento hipotético-dedutivo se faz fundamental uma importante reorganização do modo de pensar, sendo que a situação didática elaborada pelo professor pode ser um relevante intermediador do progresso das características cognitivas que estão vinculadas nesse contexto.

Nesse sentido, para Gravina (2001), um *software* de Geometria Dinâmica, a exemplo, o GeoGebra, ao ser trabalhado em sala de aula, desenvolve algumas das primeiras características do pensamento geométrico, como 'estabelecer relações e conjecturar', pois, esse ambiente computacional possibilita que o estudante produza e manipule objetos concreto-abstratos. Para a autora, o *software* educativo pode desencadear essas ações mentais de forma mais ativa do que o ambiente estático (elaboração por meio de papel e lápis).

É importante destacar que, na escola, para que haja um cenário de aprendizagem promovedor do pensar em Geometria, é fundamental a tarefa de 'desenvolver o pensamento geométrico' como uma atividade intencional. Nessa direção,

> a aprendizagem da geometria leva, necessariamente, à ascensão em patamar de conhecimento. Mas esta é aprendizagem que depende de provocação intencional porque na crucial mudança de natureza de pensamento – de empírico para dedutivo – apresentam-se dificuldades não superáveis de forma espontânea (GRAVINA, 2001, p. 57).

Contudo, como considera Almeida (2016), a atividade intencional apresenta naturezas diferentes para o estudante e para o professor. No caso do docente, a sua atividade intencional em conduzir o discente a desenvolver o pensar geométrico deve ser evidente. Ou seja, o mestre deve ter o objetivo de indicar cenários que promovam o progresso dessa instância de pensamento matemático em seus aprendizes. Um dos cenários pode ser trabalhar problemas sobre os quadriláteros notáveis.

No caso do estudante, a intenção é provavelmente indireta, pois, ao trabalhar com problemas sobre os quadriláteros notáveis, ele tem o intuito em solucionar o problema, ou seja, o foco não é o desenvolvimento do seu pensamento geométrico. Todavia, é justamente essa intenção em produzir uma solução ao problema que poderá conduzir o estudante à evolução do seu pensar geometricamente (ALMEIDA, 2016).

Ao classificar a Matemática como uma atividade humana, Gravina (2001, p. 9-10) enuncia que

> a matemática é criação humana voltada ao estudo de regularidades, quer sejam advindas de percepções sobre o mundo real, quer sejam emergências num quadro puramente abstrato. Este é um dos olhares sobre a Matemática. Em grande parte, é o olhar da geometria euclidiana. Outros podem ser os olhares, igualmente subjetivos.

Nessa direção, podemos considerar a Geometria também como uma atividade humana; para tanto, o conhecimento não está no objeto nem no sujeito, mas nas ações do sujeito sobre o objeto, "ações estas que se internalizam e se organizam, desencadeando um processo evolutivo de estruturas lógicas – de menos acabadas para mais completas – com consequente ascensão de patamar de conhecimento" (GRAVINA, 2001, p. 19).

Desse modo, o fato de um estudante analisar um losango, seja representado por meio de uma pipa, seja ilustrado por meio de uma construção no GeoGebra, não significa que ele esteja considerando esse quadrilátero notável como um objeto geométrico. Isso quer dizer a exploração desse conceito por parte do discente não indica que ele está produzindo Geometria ou vivenciando o meio geométrico.

Portanto, um estudante trabalhará no meio geométrico somente quando ele produz a compreensão e o significado ao losango. De outra maneira, um aluno está analisando um losango como um objeto geométrico ou respondendo um problema que explora suas características e propriedades no momento em que ele está pensando geometricamente.

Isso ocorre, por exemplo, quando o discente considera o losango como um quadrilátero notável que apresenta todos os lados com comprimentos de medidas iguais, logo são congruentes entre si; ou então, quando percebe que o losango está incluído no grupo dos paralelogramos, porque seus lados opostos são congruentes, os seus ângulos internos opostos possuem a mesma medida de abertura e suas diagonais cortam-se ao meio; ou entende que o losango é todo paralelogramo que apresenta todos os lados congruentes; ou ainda, percebe que o losango apresenta duas propriedades que não são evidenciadas em alguns paralelogramos quaisquer: as diagonais são perpendiculares entre si e estão localizadas nas bissetrizes dos ângulos internos (PEREIRA DA COSTA, 2016).

Nesse contexto, e com base no que discute Almeida (2016), podemos enfatizar que o pensamento geométrico é uma atividade especificamente humana que deriva "das generalizações estabelecidas, como resultado de conjecturas sobre dados e relações matemáticas e por meio de uma linguagem cada vez mais simbólica, usada na argumentação" (ALMEIDA, 2016, p. 66).

Aqui a generalização é um processo muito importante, que pode acontecer em cenários geométricos, em contextos matemáticos como a modelação, derivando-se como expansão do raciocínio que supera as situações específicas.

Além disso, para que o estudante mobilize o pensamento geométrico, a aprendizagem geométrica deve ocorrer com entendimento e clareza, portanto, no ensino e na aprendizagem da Geometria, devem ser estimuladas situações nas quais os alunos sejam capazes de desenvolver compreensão e vocabulário geométrico. Em vista disso, para obtermos o desenvolvimento do pensar geometricamente, a aprendizagem geométrica deve ter como foco a produção de significação.

Tanto Gravina (2001) quanto Kopke (2006) destacam a importância da modelagem no desenvolvimento do pensar geometricamente. Para a primeira, no processo de modelagem de objetos geométricos e de suas conexões, existe um sistema de representação que envolve diferentes tipos de linguagens: natural, simbólica, gestual, visual, gráfica, espacial, dentre outras. Essa compreensão a aproxima do que Duval (1995) considera como as representações, isto é, fonte de acesso aos objetos da Matemática.

> No sistema de representação da geometria tem-se linguagem natural/simbólica e desenhos, em solidariedade, dando suporte aos raciocínios de natureza dedutiva. Um exemplo: a demonstração do teorema de Pitágoras - "num triângulo retângulo a área do quadrado sobre a hipotenusa é igual a soma das áreas dos quadrados sobre os catetos" - inicia com desenho bastante simples solidário ao enunciado, a saber, um triângulo retângulo e quadrados sobre os

> lados do triângulo. É o acréscimo de novos objetos geométricos que torna o desenho solidário à demonstração – são novos triângulos que "deslizam" em retas paralelas.
> Uma das primeiras dificuldades da situação de aprendizagem é interpretar o desenho que acompanha uma definição ou um teorema e sua demonstração. Trata-se de entender que o desenho é uma instância particular de representação de determinada classe de objetos geométricos e que é na fusão adequada de significantes (no desenho) e significados (nos enunciados) que se constituem mentalmente os objetos geométricos e os teoremas cristalizados no sistema de representação (GRAVINA, 2001, p. 59).

Para Almeida (2016), o grau de vivência dos estudantes estabelece a linguagem aplicada. Para esse pesquisador, o grau de vivência está desvinculado da maturação biológica do estudante, isto é, não mantém relação com a idade. Em outras palavras, os discentes mais experientes são aqueles que tiveram maior convivência com cenários de aprendizagem relacionados à Geometria, que exploraram, como ilustração, o desenvolvimento de generalizações de padrões geométricos (ALMEIDA, 2016). Logo, os estudantes experientes não são, necessariamente, aqueles com maior idade.

Dando continuidade, Gravina (2001) analisa a evolução do pensamento geométrico a partir dos estágios do desenvolvimento da inteligência de Piaget (1999). Para a autora, o pensamento geométrico hipotético-dedutivo só surge no estágio operatório formal, que corresponde ao estágio piagetiano mais sofisticado, marcado pela constituição do pensamento matemático abstrato:

> o último estágio de desenvolvimento – o estágio operatório-formal – é a constituição do pensamento abstrato, independente de ações e transformações reais; é o raciocínio sobre o possível e o necessário, a capacidade de pensar com hipóteses daí tirando novas relações – os raciocínios hipotéticos-dedutivo; é o raciocínio proposicional – operações sobre operações; são as generalizações, significando a possibilidade de teorizar e colocando o sujeito para além do seu então conhecido universo de experiências imediatas (GRAVINA, 2001, p. 21).

Assim como Fischbein (1993), para a autora brasileira Gravina (2001), a Geometria Euclidiana é um campo da Matemática cujo foco é os objetos idealizados. O termo 'idealizados' trata do fato de os objetos geométricos não existirem no meio físico, mas somente no meio abstrato, isto é, no mundo das ideias, sendo derivados, então, da abstração e da generalização. Dessa forma, triângulos, retângulos, circunferências e esferas são objetos idealizados a partir de objetos físicos no meio ambiente.

As primeiras produções idealizadas de forma espontânea de toda criança baseiam-se em características globais que determinados objetos dispõem, e são exclusivamente sensações do âmbito visual e perceptivo, referentes a certas denominações.

Dessa maneira, no ensino e na aprendizagem da Geometria ocorre a sofisticação das idealizações, pois, os registros de natureza perceptiva modificam-se em objetos de âmago geométrico por meio do processo de conceitualização de seus atributos específicos.

A organização dos objetos idealizados é realizada pelo processo de modelagem matemática, permitindo o estabelecimento de conexões geométricas e, consequentemente, gerando um novo grau de conhecimento, por meio do estudo de teoremas e de demonstrações que justificam e esclarecem conexões entre as formas idealizadas.

A passagem do conhecimento geométrico empírico para o de natureza hipotético-dedutivo demanda uma adaptação. Dessa forma, procuram-se processos argumentativos que justifiquem determinadas propriedades como originárias de outras, não admitindo mais simples observações e averiguações que eram válidas até certo momento. Por consequência, refere-se ao "domínio de um certo modelo da realidade, e isto depende de abstrações e deduções inseridas em um corpo teórico" (GRAVINA, 2001, p. 52).

A pesquisadora argumenta que, no âmbito da Geometria Euclidiana, os axiomas estabelecem o modelo, sobretudo o axioma do paralelismo, com o controle de sua funcionalidade disponibilizado pelos princípios de inferência lógica. A evolução do pensamento geométrico influencia fortemente a compreensão desse modelo. A explicitação dessa evolução pode ser encontrada na Teoria de Van-Hiele, sobre os níveis de desenvolvimento de pensamento geométrico, que possui um forte diálogo com os estágios de desenvolvimento da inteligência de Piaget (1999).

Concordamos com Gravina (2001), ao considerar o primeiro nível de Van-Hiele como um tipo de pensamento geométrico de natureza empírica, pois em tal nível os alunos reconhecem formas geométricas por meio da abstração de características visuais (ou perceptivas) dos objetos do mundo físico (Geometria Empírica). Logo, as propriedades dos objetos geométricos não são consideradas.

Os outros níveis iniciais, isto é, o segundo nível (no qual ocorre a identificação das formas geométricas a partir de suas propriedades) e o terceiro nível (marcado pela articulação das propriedades dos objetos geométricos) de Van-Hiele também apresentam essências empíricas, pois são caracterizados pela ausência de argumentos dedutivos que justifiquem as propriedades das figuras e que fundamentem as relações inferenciais entre essas singularidades geométricas.

O pensamento geométrico de âmago dedutivo se forma somente a partir do quarto nível de Van-Hiele, o qual é caracterizado pela integração de axiomas e teoremas no modelo teórico da Geometria Euclidiana. Além disso, nesse nível vanhieliano, é desenvolvida a compreensão do sentido de uma demonstração. Logo, o estudante torna-se capaz de construir demonstrações.

A consolidação do pensamento geométrico hipotético-dedutivo ocorre no quinto e último nível proposto por Van-Hiele, nos quais o aluno transita pelas Geometrias Não-Euclidianas; então, observações e vivências do mundo empírico não são mais válidas.

Gravina (2001) também afirma que a compreensão da evolução do pensamento geométrico é explicada pela Teoria de Piaget. Tal fenômeno pode ser verificado nas seguintes ponderações:

> É à luz da teoria de Piaget que se pode entender esta evolução do pensamento geométrico. A identificação de diferentes formas geométricas começa com as Abstrações Empíricas; é assim que a palavra "triângulo" passa a designar a classe das formas triangulares pela comparação com formas que não guardam esta característica. As Abstrações Pseudoempíricas respondem pela depreensão, nos objetos geométricos, de propriedades neles não explícitas, mediante experimentos de pensamento; é quando são identificadas as diferentes propriedades de um quadrado – ângulos retos, lados iguais, diagonais perpendiculares – mas ainda sem o estabelecimento de relações inferenciais entre essas propriedades. Quanto aos teoremas e demonstrações, entram em cena, sobremodo, as Abstrações Reflexionantes, quando relações inferenciais tornam-se objeto de investigação e a explicação exige raciocínios de natureza lógico-dedutiva. É na coordenação das operações mentais que se

> constituem as relações existentes entre esses objetos e as razões que as explicam. Isto implica a construção de conhecimento na forma de teoria, viabilizando novos patamares de conhecimento.
> Para Piaget, a axiomatização resulta da *abstração reflexiva*. Esta, ao retroagir sobre o modelo teórico, leva à tomada de consciência da essência da axiomatização. Em novo patamar de reflexão, a liberdade de escolha de axiomas assegura fundamentos para teorias cada vez menos intuitivas (GRAVINA, 2001, p. 55).

Nessa perspectiva, a adequada articulação entre esses diferentes tipos de abstrações pode promover o desenvolvimento do pensamento geométrico. Ainda, segundo a autora, um dos principais aspectos a serem considerados na composição do pensamento geométrico é a compreensão da divergência entre validações de natureza empírica, argumentações de origem hipotético-dedutiva e a compreensão da necessidade dessas argumentações. Soma-se a isso, o estabelecimento da habilidade para produzir demonstrações.

Portanto, com relação ao seu entendimento, Gravina (2001) indica que o pensamento geométrico é a elaboração sobre formas que são, inicialmente, abstraídas do mundo em que vivemos. Além disso, a autora classifica esse pensamento em duas categorias:

- De natureza empírica: é o pensamento que identifica regularidades, mas sem preocupar-se em explicá-las (por exemplo, após alguns experimentos, o aluno conclui que no triângulo retângulo o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma das medidas dos quadrados dos catetos).
- De natureza hipotético-dedutiva: é o pensamento no quadro conceitual que se organiza por meio de noções primitivas, relações primitivas, axiomas, definições e teoremas. Nele, as demonstrações se fazem presentes (a exemplo, a equivalência de áreas explica a veracidade do teorema de Pitágoras). Este pensamento só é atingido por meio da educação formal, diferentemente do pensamento empírico. Este pode ser fundado, por exemplo, em experiências práticas com medidas.

Quanto aos experimentos de pensamento (abstrair, generalizar, estabelecer relações, errar, elaborar e refinar conjecturas, testar hipóteses e produzir demonstrações), Gravina (2001) listou os que se fazem presente nos raciocínios de natureza geométrica, mas essas habilidades fazem parte, com certeza, do pensamento matemático na sua forma mais geral.

PENSAMENTO GEOMÉTRICO NA COMPREENSÃO DE JOSÉ CARLOS PINTO LEIVAS

José Carlos Pinto Leivas (2009), em sua tese de doutoramento intitulada “Imaginação, Intuição e Visualização: a riqueza de possibilidades da abordagem geométrica no currículo de cursos de licenciatura em Matemática”, considera a Geometria como atividade vinculada ao ser humano.

Logo, tendo por base Fischbein (1987), sinaliza que essa atividade evolui dentro de um elemento intuitivo, no qual o raciocínio matemático pode ser produzido a partir de visualização, imaginação e inclusive por atributos biológicos, conforme pesquisas da Psicologia, da Sociologia e da Matemática.

Nessa direção, o conhecimento não está no objeto nem no sujeito, mas nas ações do sujeito sobre o objeto. Então, ao resolver um problema geométrico, o estudante pensará geometricamente quando sua ação estabelecerá sentido e significado no saber envolvido num determinado problema. Dessa forma, o discente atuará e interagirá no mundo da Geometria.

Assim, nessa perspectiva, podemos dizer que o pensamento geométrico é uma ação tão somente humana que se manifesta na exploração de situações que aguçam a curiosidade dos estudantes, permitindo-lhes realizar conjecturas que devem ser validadas ou refutadas por meio de contraexemplos, usando recursos apropriados, a partir de justificativas e argumentações (NASSER, 2017). Conforme tal autora, esse processo promove o raciocínio, levando ao domínio do pensamento dedutivo.

Segundo Leivas (2009, p. 60): “a educação geométrica vai muito além do que simplesmente formalização. É necessário adequar a forma de compreensão dos conceitos geométricos que têm permeado seu ensino focado exclusivamente nos Elementos de Euclides”.

Nesse contexto, para que o estudante desenvolva o pensamento geométrico, a aprendizagem geométrica deve ocorrer com sentido e compreensão, isto é, o professor de Matemática deverá enfatizar no ensino e na aprendizagem da Geometria, situações que proporcionem aos alunos uma compreensão do campo geométrico e sua linguagem (ALMEIDA, 2016).

Leivas (2009) discute sobre a existência do pensamento geométrico avançado que, segundo o autor, pode ser caracterizado como um processo capaz de produzir estruturas mentais de natureza geométrica por meio da imaginação, intuição e visualização, para a construção de conhecimentos matemáticos científicos. Desse modo, ele defende que os termos imaginação, intuição e visualização formam uma tríade fundamental ao desenvolvimento do pensamento geométrico.

Leivas (2009) e Tall (1991) consideram que o pensamento avançado não depende do grau de escolaridade em que o indivíduo se encontra, e nem da sua idade biológica.

De acordo com Leivas (2009), um pensamento geométrico avançado pode ser alcançado por um estudante em construção inicial quando ele distingue, por exemplo, um quadrado de um retângulo ao associar ao primeiro o formato de uma janela e ao segundo de uma porta. Ainda, em níveis de escolaridade básica, os alunos teriam como entender intuitivamente um fractal ou o caminho mais curto entre dois pontos de uma cidade organizada por meio da Geometria do Táxi.

Dessa forma, o pensamento geométrico avançado não é alcançado exclusivamente por estudantes em nível de graduação ou de pós-graduação, tendo em vista que eles, ‘teoricamente’, têm maiores contatos com as geometrias não euclidianas. Se na escola básica o estudante vivencia o estudo dessas geometrias, mesmo que de forma mais simples do que os estudos universitários, então esse mesmo aluno poderá desenvolver pensamento geométrico avançado em relação ao seu nível de ensino, como pode ser verificado nas pesquisas de Souza (2015) e de Portella (2016).

Tanto Leivas (2009) quanto Fischbein (1987) percebem que a intuição é algo primordial na medida em que transforma um conhecimento intuitivo em conhecimento mais elaborado. Na construção inicial do conhecimento geométrico, essas habilidades mentais: intuição, imaginação e criatividade, no entender do pesquisador, desenvolvem pensamento geométrico avançado.

Para Leivas (2009), intuição é o processo de produção de estruturas mentais para a elaboração de certo conceito da Matemática por meio de vivências concretas com um determinado objeto. Aqui, o conceito deve ser constituído a partir de reflexão e consciência, criando significado de veracidade em diálogo com a autoevidência.

O autor considera que a intuição influencia no processo de matematização de modo muito eficaz e, sobre o assunto, ele indica que a Geometria Diferencial é um forte campo para conexões entre a Geometria e Análise. Tal fato contribui amplamente para o desenvolvimento do conhecimento matemático. Leivas (2009) menciona o caso de Poincaré, que depois de negar a existência de um campo geométrico não euclidiano não intuitivo, desenvolveu seu modelo desse 'novo campo', isto é, o modelo de Poincaré para Geometria Hiperbólica.

Outro exemplo de um percurso geométrico mencionado por Leivas (2009) que é muito intuitivo e eficiente é o uso de curvas de níveis. Este conhecimento contribui no entendimento do estudo de derivadas direcionais. A análise geométrica é mais interessante do que o tradicional caminho feito no Cálculo, a partir do uso de algoritmos.

Ao analisar a Geometria Euclidiana, Leivas (2009) indica que o processo intuitivo aparece nesse ramo geométrico nos subsequentes momentos:

> 1. das construções espaciais, para dar significado à igualdade de grandezas (áreas) enraizando a álgebra geométrica [intuição topológica]; 2. da medida das grandezas e de suas relações. (múltiplo de uma grandeza) [intuição métrica]; 3. do número inteiro, para o desenvolvimento da aritmética, em que os pressupostos são retirados da teoria geral das grandezas. [intuição algébrica] (LEIVAS, 2009, p. 202).

Para o autor, essa forma de estruturar a intuição na Geometria Euclidiana, além de promover uma conexão, orientará o estudo da lógica euclidiana, visto que a igualdade de grandezas, sobretudo em relação à grandeza geométrica área, conduzirá a primeira obra da chamada Álgebra Geométrica.

Na sua tese, Leivas (2009) utiliza o termo imaginação para indicar um modo de concepção mental de um conceito de Matemática, que pode ter uma representação a partir de um símbolo ou esquema visual, algébrico, verbal ou um arranjo deles, com o fim de informar esse conceito ao próprio indivíduo ou para outros.

Essa compreensão aproxima o autor das discussões de Duval (1995). Este destaca a importância das representações semióticas para a atividade cognitiva do pensamento humano, pois elas também são responsáveis pela comunicação, ou seja, deixar as representações mentais disponíveis e perceptíveis ao aluno.

Segundo Leivas (2009), a imaginação está muito relacionada à abstração, do mesmo modo como a intuição, e essas habilidades podem ser acrescentadas pela visualização, a qual deve ser compreendida como um processo capaz de ajudar na produção do fazer em Matemática, além de informar conceitos nos vários campos matemáticos. Logo, essa última habilidade não deve ser considerada como uma maneira de representar uma figura ou um objeto.

Ao discutir a relação entre imaginação e memorização, Leivas (2009) baseia-se em Jones e Bills (1998) e em Del Grande (1994):

> com relação a imaginação e memorização, Jones e Bills (1998) dizem que estas são imagens mentais formadas de experiências planejadas e investigadas na mente e memorizadas a partir de experiências. Para Del Grande (apud LINDQUIST; SCHULTE, 1994, p. 158), a memória visual é uma das aptidões que parecem ter a maior importância para o desenvolvimento acadêmico além de coordenação visual-motora, percepção de figuras em campos, constância de percepção, percepção de posição no espaço, percepção de relações espaciais e discriminação visual (LEIVAS, 2009. p. 158).

Ao analisar o processo de comunicação geométrico, Leivas (2009) afirma que os símbolos visuais e os verbais podem exercer uma função que deve ser apreciada, tendo em vista que algumas pessoas apresentam uma forma de imaginar mentalmente que contribui para a elaboração de conceitos abstratos de modo mais acentuado do que outras.

Concordando com Skemp (1993), José Carlos Pinto Leivas argumenta que a construção de conceitos é um processo complexo. Então, paratornar uma determinada ideia de um conceito em parte consciente de uma pessoa, faz-se necessária uma ampla articulação da ideia com um símbolo.

Nessa direção, os símbolos verbais, apesar de apresentarem simples comunicação, são plurais, dependem da coletividade, ao passo que os símbolos visuais, mesmo possuindo difícil comunicação, são singulares, isto é, são individuais. Tal fato, geralmente, pode representar um obstáculo à aprendizagem.

Dessa forma, tendo por sustentação em Skemp (1993), Leivas (2009) faz referência a duas classes de imaginação importantes do pensamento geométrico. A primeira pode ser representada por símbolos visuais, que se esclarecem a partir de diagramas de todas as classes, principalmente as figuras geométricas sendo relacionadas com o Pensamento Visual.

A comunicação desse pensamento ocorre por meio de atividades como desenho, pintura ou filmagem. Tais ações tornam a comunicação um processo complicado, pois no ensino há uma ênfase na língua materna representada por meio de linguagem verbal escrita (representações verbais).

A segunda classe de imaginação pode ser ilustrada por símbolos algébricos, que apresentam maior proximidade com o conceito do que com a associação ao símbolo visual. Essa classe está ligada ao Pensamento Verbal. Provavelmente, em decorrência disso, somando-se à complexidade da comunicação visual, há no ensino da Matemática uma ênfase das representações sociais ou da língua materna (LEIVAS, 2009).

Leivas (2009) destaca a necessidade de se considerar a imaginação desde os anos iniciais do ensino fundamental, pois ela que desenvolve o pensamento geométrico evitando, assim, alguns problemas no ensino superior.

> Acredito que, se a imaginação fosse explorada no desenvolvimento de um pensamento geométrico durante toda a escolaridade, a Análise não teria a conotação que muitas vezes lhe é atribuída nos diversos cursos de Licenciatura, como a disciplina mais difícil. Em razão de as disciplinas de Cálculo utilizarem desenvolvimento apenas algorítmico e elementos não visuais, quando o aluno chega à Análise, as dificuldades são imensas, haja vista, por exemplo, a representação geométrica em Álgebra Linear, quando os vetores são definidos em espaços de dimensão n, com $n \geq 3$. Até $n = 3$ ainda as representações são visuais, como feitos antes na representação do cubo tridimensional num plano bidimensional ou a representação no tridimensional de um cubo em quatro dimensões, o qual necessita de imaginação para poder abstrair (LEIVAS, 2009. p. 168).

Com relação à visualização, o autor a considera como um processo de elaborar imagens mentais, com o fim de produzir e informar certo conceito da Matemática e favorecer a solução de problemas voltados aos campos da Geometria e da Análise.

Segundo Leivas (2009), a visualização apresenta alguns benefícios que podem ser tanto mentais como físicos, pois a imaginação pode ter aspecto pictórico e possuir ligações com percepção, com memorização e com o âmago dinâmico de imagens, além do diálogo com a elaboração de conceitos.

Em relação à imaginação e à percepção, há muitos modos nos quais a percepção pode favorecer a evolução da imaginação. Um deles pode ser a percepção de natureza tátil, por meio da qual a pessoa, em convívio com certo objeto, produz uma imagem mental a partir de explorações apenas táteis, mas sem visualizar esse mesmo objeto.

Como apontado pelo autor, o uso de jogos com blocos lógicos, com crianças em situações pré-escolares, é um importante recurso para exemplificar esse fenômeno.

O progresso da inteligência em Matemática, em específico, a elaboração de conceitos muito tem a ser beneficiada caso sejam usados os procedimentos visuais típicos da Geometria, desde que eles sejam valorizados em comparação ao algorítmico ou aos procedimentos geométricos. Conforme Leivas (2009, p. 216) destaca que

> o auxílio visual geométrico [...] pode ser o elemento que pode percorrer a Geometria como componente curricular de forma interdisciplinar no sentido defendido por Gusdorg (citado por POMBO, 1993) de que “inter” não significa uma pluralidade ou uma justaposição, muito pelo contrário, faz uma chamada a um espaço comum, um elemento de coesão entre diferentes saberes. A interdisciplinaridade supõe a predisposição de especialistas se abrirem para o novo, de irem além do seu domínio de conhecimento específico, permitindo uma abertura de pensamento e de curiosidade.

Assim, fica evidente a importância dada pelo pesquisador à interdisciplinaridade, isto é, considerar a Geometria como um saber interdisciplinar e, no caso particular da licenciatura em Matemática, compreender esse campo matemático como vértice de conexão entre as várias disciplinas que contemplam os currículos dos cursos de formação de professores. Tal visão compactua com a de Rodrigues (1999) que, também destaca o enfoque interdisciplinar como promovedor do desenvolvimento do pensamento geométrico.

A ausência de uma prática interdisciplinar geométrica aliada à desconsideração da visualização no ensino e na aprendizagem da Geometria acaba gerando algumas incertezas, como no caso dos conceitos de circunferência e de círculo:

> ainda existe muita confusão entre os conceitos de circunferência e de círculo, fato que não deveria mais ocorrer a partir da expressão algébrica de cada um desses lugares geométricos, objetos da Geometria Analítica, pois enquanto que o primeiro é dado por uma equação, o segundo é dado por uma inequação; enquanto o primeiro é visualizado como uma curva, o segundo é visualizado como uma região. Talvez em virtude dessa ambiguidade de notação que ainda perdura, modernamente se utiliza o conceito de bola para o círculo, ou seja, como a região do plano cuja fronteira é a circunferência. Essa ambiguidade parece produzir um obstáculo epistemológico quanto ao conceito de esfera, a qual, para muitos estudantes é um objeto maciço e não uma superfície. A topologia trata de forma mais precisa muitos destes conceitos (LEIVAS, 2009. p. 226).

Leivas (2009) alerta que visualização em Matemática não pode ser considerada como um simples modo de representar os objetos, mas sim como um processo de expressão de uma linguagem elaborada de forma mental, que pode ser o agente introdutório da abstração. Tal processo é extremamente relevante à produção do conhecimento em Matemática, sendo que suas ideias, conceitos e procedimentos possuem grande repertório de recursos de natureza visual.

Ainda, segundo o autor, imaginação, criatividade e abstração são habilidades que integradas à intuição e à visualização formam um agrupamento essencial ao pensamento geométrico ao longo de toda a escolarização, incluindo os cursos de formação de professores.

Nesses cursos, o pensamento geométrico surge como uma alternativa para um avanço na qualidade da Educação Básica, sobretudo na melhoria da prática pedagógica dos docentes.

Portanto, com relação à sua compreensão, Leivas (2009) preconiza que o pensamento geométrico é um processo capaz de elaborar estruturas geométricas mentais a partir de imaginação, intuição e visualização, para a produção de conhecimentos matemáticos científicos.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao realizarmos a análise dos estudos desenvolvidos por Gravina (2001) e Leivas (2009), percebemos que construir uma definição de pensamento geométrico é uma atividade complexa. Ambos os pesquisadores, por exemplo, defendem que o pensamento geométrico é a capacidade mental de produzir conhecimentos em Geometria. No entanto, não há consenso desses autores quando se trata da maneira como esse pensamento é produzido.

Gravina (2001) considera que a construção do pensamento geométrico ocorre com base na análise das formas que são, inicialmente, abstraídas do mundo em que vivemos, bem como por meio da dedução de teoremas e demonstrações, mediante inferência lógica. De outro lado, Leivas (2009) aponta que esse processo deriva de imaginação, intuição e visualização.

Essa complexidade acontece, possivelmente, devido à própria natureza evolutiva da Geometria, à grande quantidade de objetos geométricos (ponto, segmento de reta, quadriláteros, circunferência etc.) vinculados ao seu campo conceitual, à mobilização de diferentes experimentos matemáticos (explorar, elaborar e refinar conjeturas, testar hipóteses, construir demonstrações) e, ainda, pelas diferentes maneiras prováveis de considerar o pensamento em geral (ALMEIDA, 2016).

No entanto, tendo em vista que planejamos produzir uma definição de pensamento geométrico para ser utilizada por professores e pesquisadores, a discussão aqui realizada, permitiu-nos construir uma visão sobre a natureza do pensamento geométrico.

Como visto anteriormente, Gravina (2001) apresentou duas naturezas dessa forma de pensar matematicamente: pensamento geométrico empírico e pensamento geométrico hipotético-dedutivo. Além disso, Leivas (2009), ao introduzir o pensamento geométrico avançado, provou-nos dois questionamentos importantes: Existe um pensamento geométrico elementar? Como caracterizá-lo?

Embora o pesquisador não discuta sobre esse pensar em Geometria de natureza elementar, e muito menos não faça a distinção da forma avançada apresentada na sua pesquisa, acreditamos na existência dessas duas categorias (elementar e avançada) do pensar geométrico. Para isso, baseamos-nos também em Tall (1991; 1995), que discute sobre pensamento matemático de natureza avançada e elementar. Tall (1995) aborda que o desenvolvimento do pensamento matemático se inicia nos primeiros anos da infância, finalizando com a Matemática de nível universitário e a pesquisa matemática. Nessa direção, o autor sugere que

> [...] o crescimento matemático começa a partir de percepções e ações em objetos no meio ambiente. As 'percepções' de objetos bem-sucedidas conduzem por meio de representações visuoespaciais com aumento do apoio verbal à prova verbal de geometria visualmente inspirada. As 'ações' bem-sucedidas em objetos usam representações simbólicas de forma flexível como 'proceptos' – processos para fazer pensar sobre conceitos – em aritmética e álgebra. A estrutura cognitiva resultante no pensamento matemático elementar torna-se um pensamento matemático avançado quando as imagens conceituais na estrutura cognitiva são reformuladas como definições conceituais e usadas para construir conceitos formais que fazem parte de um corpo sistemático de

> conhecimento matemático compartilhado (TALL, 1995, p. 161, tradução nossa).

O fato de o autor considerar que o desenvolvimento do pensar em Matemática se iniciar na infância, em nosso entendimento, esse pensamento pode dar-se sem a escolarização, isto é, antes de a criança frequentar os ambientes escolares formais. No caso da Geometria, a observação do espaço, o contato e a compreensão dos objetos que fazem parte do seu meio, a introdução à construção das relações espaciais são características do pensamento geométrico que são desenvolvidas por crianças em seus primeiros anos, em locais informais.

A Geometria vivenciada por elas é voltada para a prática cotidiana, de natureza empírica e elementar. Logo, não há preocupação em considerar o campo geométrico como um modelo teórico. Dessa forma, os objetos do mundo físico não são analisados como representações de objetos geométricos no ambiente real. Assim, o pensamento geométrico desenvolvido nesses contextos é de natureza elementar.

Então, tendo por base Tall (1991; 1995), introduzimos que o pensamento geométrico elementar é marcado pelo contato/vivência com a Geometria da prática cotidiana (desenvolvido inicialmente antes de a criança frequentar formalmente a escola), e pelo estudo de conceitos geométricos mais simples e elementares vinculados à Geometria Euclidiana Plana, quando a criança inicia o processo de escolarização formal.

Nesse nível de pensamento, ela (a criança) observa o espaço, analisa os objetos do seu meio a partir do toque, inicia a construção de suas relações espaciais, analisa as formas e as figuras geométricas a partir da aparência global dos objetos que as representam, seja em um plano ou em um espaço. Desse modo, o contato com esse tipo de Geometria possibilita o desenvolvimento do pensamento geométrico elementar. Gravina (2001) denomina esse modo de pensar em Geometria como pensamento geométrico empírico.

Do mesmo modo que Leivas (2009), consideramos que no pensamento geométrico, de natureza avançada, o foco é o estudo de objetos geométricos mais complexos, pertencentes, por exemplo, à Geometria Fractal, à Geometria Hiperbólica, à Geometria Esférica, à Topologia, etc., bem como pela integração de axiomas e teoremas no modelo teórico que constitui a Geometria Euclidiana. Conforme o pesquisador, a vivência sistemática com essas diferentes Geometrias impulsiona o desenvolvimento do pensamento geométrico avançado que, para Gravina (2001), é de natureza hipotética-dedutiva.

Ao chegar nesse nível de pensamento, o discente necessita realizar a distinção entre modelos refinados como os das Geometrias Não-Euclidianas. Por exemplo, no estudo de Geometrias sob a Axiomática de Hilbert, o estudante trabalha Geometria e Imaginação e, a partir disso, os conceitos ficam mais complexos como Curvas em Geometria Diferencial, Grupos de Lie. Dessa forma, será possível fazer analogia entre o Cálculo Diferencial, o Cálculo Avançado ou a Análise. Portanto, o que determina a natureza do pensamento geométrico do estudante é o tipo de Geometria que a pessoa (criança ou adulto) estiver estudando ou vivenciando (mesmo em ambientes não escolares), independentemente do seu nível de escolaridade, de sua idade e de sua maturação biológica.

Por exemplo, um aluno do ensino fundamental que vivenciar sistematicamente o estudo intuitivo da Geometria Fractal poderá desenvolver pensamento geométrico avançado, ao passo que um discente do ensino superior, sem contato com conceitos geométricos dados na Educação Básica, e sem vivência desse saber na universidade, certamente desenvolverá pensamento geométrico elementar, assim como uma criança em seus primeiros anos. Aqui, a diferença é que a criança e o universitário atuam em distintos níveis de pensamento geométrico elementar.

Agora, estabelecendo uma conexão entre nosso estudo e as pesquisas de Gravina (2001) e Leivas (2009), podemos tomar que o pensamento geométrico elementar, introduzido em nosso artigo, corresponde ao pensamento geométrico empírico apontado por Gravina (2001), e o pensamento geométrico avançado proposto por Leivas (2009), em alguns casos, pode coincidir com o pensamento geométrico hipotético-dedutivo sinalizado por Gravina (2001).

Para mais, como apontado por Fischbein (1993), Duval (1995), Pais (1996), Gravina (2001) e Leivas (2009), a Geometria é um campo matemático constituído por objetos idealizados. Então, os objetos geométricos não existem na realidade (no mundo físico), mas somente no mundo das ideias, oriundos, assim, da abstração. Os objetos de nossa realidade prática são tridimensionais e, embora, o cubo e a esfera sejam dessa dimensão, por exemplo, eles são apenas construções mentais, vinculadas ao mundo abstrato, por isso, não existem no mundo concreto. No mundo real encontramos representações desses objetos geométricos. A título de exemplo, um dado é um objeto real tridimensional presente em nossa realidade, que pode representar um cubo, isto é, é uma representação de um objeto ideal do mundo platônico (abstrato).

Por fim, concluímos que o pensamento geométrico é a capacidade mental de produzir conhecimentos em Geometria; de mobilizar, de forma coerente, os instrumentos geométricos na resolução de problemas; é a capacidade de entender a complexidade dos fenômenos e de realizar inferência sobre eles; de reconhecer e verificar a relevância da Geometria como um instrumento para compreensão do mundo físico e como um modelo em Matemática para entendimento do mundo teórico.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, J. R. **Níveis de desenvolvimento do pensamento algébrico:** um modelo para os problemas de partilha de quantidade. 2016. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2016.

BISHOP, A. J. Review of research on visualization in mathematics education. **Focus on Learning Problems in Mathematics**, Chicago, v. 11, n. 1-2, p. 7-16, 1989.

BLANCO, T. F. Atendiendo habilidades de visualización em la enseñanza de la geometría. *In*: Festival Internacional de Matemática, 9., 2014, Puntarenas, **Anales**[...]. Puntarenas, 2014. p. 1-13.

CÂMARA DOS SANTOS, M. O Cabri-Géomètre e o desenvolvimento do pensamento geométrico: o caso dos quadriláteros. *In*: BORBA, R.; GUIMARÃES, G. (org.). **A Pesquisa em Educação Matemática:** repercussões na sala de aula. São Paulo: Cortez, 2009. p. 177-211.

DEL GRANDE, J. Spatial Sense. **Journal for Research in Mathematics Education**, Reston, v. 1, n. 1, p. 14-20, 1990.

______. Percepção espacial e geometria primária. *In*: LINDIQUIST, M. M.; SHULTE, A. P. (orgs.). **Aprendendo e ensinando Geometria**. Tradução. Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1994. p. 156-167.

DUVAL, R. **Sémiosis et pensée humaine:** registres sémiotiques et apprentissages intellectuels. Berne: Peter Lang, 1995.

FISCHBEIN, E. **Intuition in science and mathematics:** an educational approach. Dordrecht: Reidel, 1987.

______. The Theory of Figural Concepts. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 24, n.2, p. 139-162, 1993.

GRAVINA, M. A. **Os ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotético-dedutivo.** 2001. Tese (Doutorado em Informática na Educação) –Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2001.

______. Drawing in movement and insights for the proof process. **International Journal of Continuing Engineering Education and Life Long Learning**, Enschede, v. 18, n. 5, p. 564-574, 2008.

GUTIÉRREZ, A. **Procesos y habilidades em visualizacion espacial.** *In*: Congreso Internacional Sobre Investigación em Educación Matemática, 3., 1991, Valencia. **Anais** [...]. València: Universitat de València , 1991, p. 44-59.

JONES, K.; BILLS, C. Visualisation, imagery and the development of geometrical reasoning. **Proceedingof the British Society for Researchin to Learning Mathematics**, Birmingham, v. 18, n. 1, p. 123-128, 1998.

KOPKE, R. C. M. **Geometria, desenho, escola e transdisciplinaridade:** abordagens possíveis para a educação. 2006. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2006.

LABORDE, C. Quelques problemes d'enseignement de la geometrie dans la scolarite obligatoire. **For the Learning of Mathematics iu Association**, Montreal, n.3, p.27-34, 1985.

LEIVAS, J. C. P. **Imaginação, Intuição e Visualização:** a riqueza de possibilidades da abordagem geométrica no currículo de cursos de Licenciatura de Matemática. 2009. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2009.

MICHOUX, A. B. **Evolution des conceptions et de l'argumentation en géométrie chez les élèves:** paradigmes et niveaux de van Hiele à l'articulation CM2 – 6ème. 2008. Thèse (Doctorat en Didactiques des Mathématiques) – Université Paris Diderot – Paris VII, Paris, 2008.

NASSER, L. O desenvolvimento do raciocínio em geometria. **Boletim GEPEM**, Rio de Janeiro, v.1, n.27, p. 93-99, 1990.

______. Estimulando o domínio do processo dedutivo no curso de licenciatura em Matemática. **Vidya**, Santa Maria, v. 37, n. 2, p. 499-513, 2017.

PAIS, L. C. Intuição, experiência e teoria geométrica. **Revista Zetetiké**, Campinas, v.4, n.6, p. 65-74, 1996.

PASTOR, A. J. **Aportaciones a la interpretación y aplicación del modelo de Van Hiele:** la enseñanza de las isometrias del plano. La evaluación del nível de razonamiento. 1993. Tesis (Doctorado em Didàcta de la Matemàtica) – Universitat deValència, València, 1993.

PEREIRA DA COSTA, A. **A construção do conceito de quadriláteros notáveis no 6º ano do ensino fundamental***:* um estudo sob a luz da teoria vanhieliana. 2016. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2016.

PIAGET, J. **Seis estudos de psicologia.** Trad. M. A. M. D'Amorim e P. S. L. Silva. 24 ed. Rio de Janeiro: Forense Universitaria, 1999.

PORTELLA, H. P. **Tecnologias computacionais como ferramentas para inserir conhecimentos de Geometria Hiperbólica no ensino fundamental.** 2016. Dissertação (Mestrado em Ensino de Física e de Matemática) – Centro Universitário Franciscano, Santa Maria, 2016.

RODRIGUES, M. H. W. L. **Da realidade à virtualidade, o pensamento visual com interface:** contribuição das linguagens técnicas de representação da forma àeducação. 1999. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do RioJaneiro, Rio de Janeiro, 1999.

SKEMP, R. **Psicología de la prendizaje de las matemáticas**. 2. ed. Madrid.EdiçionesMorata, 1993.

SOUZA, H. M. **A Geometria do táxi:** investigação sobre o ensino de uma geometrianão euclidiana para o terceiro ano do ensino médio. 2015. Dissertação (Mestrado em Ensino de Física e de Matemática) – Centro Universitário Franciscano, SantaMaria, 2015.

TALL, D. The Psychology of Advanced Mathematical Thinking. *In*: Tall D. O. (ed.)**Advanced Mathematical Thinking**, Kluwer: Holland, 1991. p. 3-21.

______. **Cognitive Growth in Elementary and Advanced MathematicalThinking.** *In*: CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF LEARNING MATHEMATICS, 1., 1995, Recife. **Anais** [...]. Recife: UFPE, 1995, p. 161-175.

Submetido em: setembro de 2019
Aprovado em: janeiro de 2020